MP4: séance 4

2018年1月13日 20:21

§1 Ouverts, fermés

Dans ce paragraphe, on fixe un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Déf Soient $x \in E$ et $r > 0$. On désigne ar $B(x;r)$ l'ensemble $\{y \in E \mid \|y-x\| < r\}$, appelé boule ouverte centré en x et de rayon r. On dit qu'un sous-ensemble V de E est un voisinage de x s'il contient une boule centré en x.

On dit qu'un sous-ensemble U de E est ouvert s'il est voisinage de tous ses éléments.

On dit qu'un sous-ensemble F de E est fermé si son compliment est ouvert.

Prop 1
(1) $\emptyset$ et E sont des ouverts

Exemple $B(x;r)$ est un ouvert : $\forall y \in B(x;r)$, on a $B(y; r-\|y\|) \subset B(x;r)$

(2) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts, alors $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.

(3) Si U_1 et U_2 sont deux ouverts, alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert.

Preuve (1) est trivial

(2) Si $x \in U$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme U_i est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x;r) \subset U_i \subset U$.

(3) Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Comme U_1 et U_2 sont ouverts, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x;r_1) \subset U_1$ et $B(x;r_2) \subset U_2$. Soit $r = \min(r_1, r_2)$. On a $B(x;r) \subset U_1 \cap U_2$ ✻

Corollaire (1) $\emptyset$ et E sont des fermés

(2) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

(3) Si F_1 et F_2 sont des fermés, alors $F_1 \cup F_2$ est un fermé.

Prop.2 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x \in E$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si, pour tout voisinage V de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Preuve "$\Rightarrow$" Soit V un voisinage de x. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $B(x;\varepsilon) \subset V$. Comme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.
Par conséquent $x_n \in V$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.

"$\Leftarrow$" Pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x;\varepsilon)$ est un voisinage de x. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x;\varepsilon)$ (i.e. $\|x_n - x\| < \varepsilon$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. ✻

Déf Soit A un sous-ensemble de E. On appelle point adhérent de A tout $\xi \in E$ qui est la limite d'une suite dans A.

MP4: séance 4

2018年1月13日 20:21

Prop. Soient A un sous-ensemble de E, et $x \in E$. Alors x est un point adhérent si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$.

Preuve "$\Rightarrow$" Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x. Si V est un voisinage de V, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq N\} \subset V$. On obtient donc $V \cap A \neq \emptyset$

"$\Leftarrow$" Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, soit $x_n \in A \cap B(x; \frac{1}{n})$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A converge vers x.

Déf Soit A un sous-ensemble de E. Soit $x \in A$. On dit que x est un point intérieur de A si A est un voisinage de x. On désigne par $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

Remarque - Soient A et B deux sous-ensembles de E, $A \subset B$. Si A est un voisinage de $x \in E$, alors B l'est aussi. donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

- Si U est un ouvert de E, alors $\mathring{U} = U$ car U est voisinage de tous ses points.

Prop Soit A un sous-ensemble de E. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Preuve Si U est un ouvert de E contenu dans A, alors $\mathring{U} = U \subset \mathring{A}$.

En outre, pour tout $x \in \mathring{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x;\varepsilon) \subset A$. Comme $B(x;\varepsilon)$ est un ouvert, on a $B(x;\varepsilon)$ $\mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est un ouvert.

Déf Soit $A \subset E$. On désigne par $\bar{A}$ l'intersection des fermés contenant A, appelé l'adhérence de A. (c'est le plus petit fermé de E contenant A).

Prop. $\bar{A}$ s'identifie à l'ensemble des points adhérents de A.

Preuve Soit x un point adhérent de A. Montrons que x appartient à tout fermé F contenant A. Si $x \notin F$, alors $x \in F^c$. Comme F est un fermé, F^c est un ouvert, donc un voisinage de x. Par conséquent, $F^c \cap A \neq \emptyset$. Cela est absurd car $F \supset A$.

Réciproquement, soit $x \in \bar{A}$. S'il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap A = \emptyset$, alors V^c est un fermé contenant A, et donc V^c contient $\bar{A}$. Cela est absurde car $x \in \bar{A}$.

※

§2 Limite d'une application

On fixe deux espaces vectoriels normés E et F

Déf Soient A un sous-ensemble de E et $f : A \to F$ une application. Soit $y \in \bar{A}$. On dit que f admet une limite en y s'il existe $a \in F$ tel que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers y, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

On désigne par $\lim_{x \in A, x \to y} f(x)$ cette limite.

Prop. f admet a comme sa limite en y si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, $\forall x \in B(y; \delta(\varepsilon)) \cap A$, $\|f(x) - a\| < \varepsilon$.

Preuve "$\Rightarrow$" par l'absurde. $\exists \varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver x_n dans $B(y; \frac{1}{n}) \cap A$ tel que $\|f(x_n) - a\| \geq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y puisque $\|x_n - y\| \leq \frac{1}{n}$. Cependant, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a.

"$\Leftarrow$" Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers y. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(y; \delta(\varepsilon))$ pour $n \geq N$. On obtient donc $\|f(x_n) - a\| < \varepsilon$ pour $n \geq N$. ※

Déf Soient A un sous-ensemble de E et $f : A \to F$ une application. Si, pour tout $y \in A$, l'application f admet $f(y)$ comme sa limite en y, alors on dit que l'application f est continue en y. Si f est continue en tout point $y \in A$, on dit que f est continue.

Prop. Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Alors f est continue en $y \in A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de $f(y)$ dans F, il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(V) \supset A \cap U$.

Preuve "$\Rightarrow$" Sans perte de généralité, on peut supposer que V est de la forme $B(f(y), \varepsilon)$. Comme $f(y) = \lim_{x\in A, x\to y} f(x)$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, $\forall x \in B(y; \delta(\varepsilon)) \cap A$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. D'où $f^{-1}(B(f(y), \varepsilon)) \supset B(y; \delta(\varepsilon)) \cap A$.

"$\Leftarrow$" Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers y. Montrons que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(y)$. Soit V un voisinage de $f(y)$. Il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(V) \supset A \cap U$. Comme U est un voisinage de y, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Donc $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(y)$.

MP4: séance 4

2018年1月13日 20:21

<u>Corollaire</u> Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Alors f est continue si et seulement si, pour tout ouvert V de F, il existe un ouvert U de E tel que $f^{-1}(V) = U \cap A$.

<u>Preuve</u> Pour tout $y \in f^{-1}(V)$, V est un voisinage de $f(y)$. Donc il existe un voisinage ouvert U_y de y tel que $f^{-1}(V) \supset U_y \cap A$. Soit $U = \bigcup_{y \in f^{-1}(V)} U_y$. C'est un ouvert de E.
On a $f^{-1}(V) \supset U \cap A$