MP4: séance 6

Rappels Soient E et F deux espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application.

Soit $x \in A$. On dit que f est continue en x si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, pour tout $y \in A$, $\|y - x\| < \delta$, on a $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$.

On dit que f est continue si, pour tout $x \in A$, f est continue en x.

Exemples fondamentaux

Déf On dit qu'une application $f : A \to F$ est lipschitzienne s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|$$

Prop Toute application lipschitzienne est continue.

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers $x \in A$. on a

$$\|f(x_n) - f(x)\| \leq C\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$ ✲

Corollaire ① Si $A \subset E$, l'application d'inclusion $A \to E$ est continue

② Tout application linéaire bornée est continue.

③ Si $A \subset E$, $\xi \in E$, la fonction $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \|\xi - x\|$ est continue $\left(|\varphi(x) - \varphi(y)| = \big| \|\xi - x\| - \|\xi - y\| \big| \leq \|x - y\| \right)$

Déf Soient $(F_1, \|\cdot\|_1)$ et $(F_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On définit une norme $\|\cdot\|_{\ell^1}$ sur $F_1 \oplus F_2$ par $\|(x, y)\|_{\ell^1} = \|x\|_1 + \|y\|_2$. appelée somme directe ℓ^1 de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On défini $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ sur $F_1 \oplus F_2$ par $\|(x, y)\|_{\ell^\infty} = \max(\|x\|_1, \|y\|_2)$, appelé somme directe ℓ^∞.

Prop. Soient $A \subset E$, $f_1 : A \to F_1$ et $f_2 : A \to F_2$ deux applications continues. Alors l'application $f : A \to F_1 \oplus F_2$ définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ est continue, où on considère $\|\cdot\|_{\ell^1}$ sur $F_1 \oplus F_2$

Preuve Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers $x \in A$.

$$\|f(x_n) - f(x)\|_{\ell^1} = \|f_1(x_n) - f_1(x)\| + \|f_2(x_n) - f_2(x)\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$ ✲

Prop. Soient $A_1 \subset F_1$, $A_2 \subset F_2$, $g_1 : A_1 \to E$ et $g_2 : A_2 \to E$ deux applications continues. Alors $g : A_1 \times A_2 \to E$, $g(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$ est continue, où on considère $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ sur $F_1 \oplus F_2$

Preuve Soient $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $A_1 \times A_2$ qui converge vers $(x, y) \in A$.

$$\|g(x_n, y_n) - g(x, y)\| \leq \|g_1(x_n) - g_1(x)\| + \|g_2(y_n) - g_2(y)\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

MP4: séance 6

Notation : Soient E et F deux espaces vectoriels normé sur $\mathbb{R}$. $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $x_0 \in \overline{A}$, et $g : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On note

$$f(x) = O(g(x)) \qquad x \in A \quad x \to x_0$$

s'il existe $C>0$ et $r>0$ tels que $\|f(x)\| \leq C|g(x)|$ pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq r$

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \in A, \; x \to x_0$$

s'il existe $r>0$ et une fonction $\varepsilon(\cdot) : A \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \in A, x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et que $\|f(x)\| \leq \varepsilon(x)|g(x)|$ pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq r$.

avec cette notation, l'énoncé $\lim\limits_{x \in A, x \to x_0} f(x) = l$ peut s'écrire comme

$$f(x) = l + o(1) \qquad x \in A, \; x \to x_0$$

§ 3 Topologie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension $d < +\infty$ sur $\mathbb{R}$, muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $(e_i)_{i=1}^{d}$ une base de E. Alors

(1) Il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_d e_d\| \geq \alpha \max_{i \in \{1, \cdots, d\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$$

(2) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans E, alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans E.

Preuve On raisonne par récurrence sur la dimension d de E.

Dans le cas où $d = 1$, le premier énoncé est trivial : il suffit de prendre $\alpha = 1$. Le deuxième énoncé est le théorème de Bolzano-Weierstraß pour $\mathbb{R}$.

passage de d à $d-1$:

Soit $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\{e_1, \cdots, e_{d-1}\})$. Considérons la fonction $\varphi : F \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(y) = \|e_d - y\|$. La fonction φ est continue sur F. Soit $r > 0$ tel que $F_r := \{y \in F \mid \varphi(y) \leq r\} \neq \emptyset$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F_r tel que $\varphi(y_n)$ converge vers $\inf \varphi$. L'ensemble F_r est borné car $y \in F_r \Rightarrow \|y - e_d\| \leq r$ $\Rightarrow \|y\| \leq r + \|e_d\|$. Quitte à prendre une sous-suite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut supposer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $y \in F$. Par la continuité de φ, on a $\varphi(y) = \inf \varphi > 0$. Soit $\alpha' > 0$ tel que $\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{d-1} e_{d-1}\| \geq \alpha \max\limits_{i \in \{1, \cdots, d-1\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$.

MP4: séance 6

Soit $\alpha_d = \frac{\inf \varphi}{\|e_d\|}$. pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d\| \geq |\lambda_d| \cdot \inf \varphi \geq \alpha_d |\lambda_d| \cdot \|e_d\|$$

Quitte à permuter les coordonnées, on obtient $\alpha_1, \dots, \alpha_d > 0$ tels que

$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d\| \geq \alpha_i |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Il suffit de prend $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ pour obtenir (1)

(2) On écrit chaque x_n comme $\lambda_{1,n} e_1 + \dots + \lambda_{d,n} e_n$, alors

$\|x_n\| \geq \alpha \max\limits_{i \in \{1, \dots, d\}} |\lambda_{i,n}| \cdot \|e_i\|$.

Donc la suite $(|\lambda_{i,n}|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On peut donc prendre un sous ensemble infini $\textcircled{A}$ de $\mathbb{N}$ tel que

$(\lambda_{i,n})_{n \in \textcircled{A}}$ converge vers certait $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Soit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Alors $\|x_n - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{i,n} - \lambda_i| \cdot \|e_i\| \longrightarrow 0 \quad (n \in \textcircled{A}, n \to \infty)$

<u>Corollaire</u> Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension fini et normé sur $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset E$ tel que $A = \bar{A}$ (les limites des suites dans A restent dans A) et que A est bornée. Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe a et b dans A tels que $f(a) = \inf f$, et $f(b) = \sup f$. En particulier $\{\inf f, \sup f\} \subset \mathbb{R}$

<u>Preuve</u> Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\inf f$.

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers $a \in A$)

Comme f est continue $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \inf f$.