CHAPITRE 6

DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLE

Dans ce chapitre, on fixe un espace vectoriel E de rang fini sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

6.1. Dérivées partielles

Définition 6.1. — Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble U de E. Soient $x \in U$ et h un vecteur dans E. On dit que f est *dérivable* en x le long de la direction de h s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que U contient $\{x + th \,:\, |t| < \varepsilon\}$ et que la limite

$$\partial_h f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, la fonction $]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ qui envoie t sur $f(x+th)$ est dérivable en 0. Le nombre $\partial_h f(x)$ est appelée la dérivé partielle de f en x le long de la direction de h.

Si on fixe une base $(e_i)_{i=1}^r$ de E et utilise les variable $(x_1, \ldots, x_r)$ pour désigner les coordonnées d'un vecteur général dans E, alors la dérivée partielle $\partial_{e_i} f(x)$ est notée comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ aussi.

Exemple 6.2. — Soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \|x\|^2$. Alors pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$, la fonction f est dérivable en x le long de la direction de h. En effet, on a

$$\|x + th\|^2 = \langle x + th, x + th \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + t^2 \|h\|^2.$$

On a donc $\partial_h f(x) = 2\langle x, h \rangle$.

6.2. Différentielle

Définition 6.3. — Soient U un sous-ensemble ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *différentiable* en un point $x \in U$ s'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \varphi(h)|}{\|h\|} = 0.$$

L'application linéaire φ est appelée *différentielle* de f en x, noté $Df(x)$.

Proposition 6.4. — *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un ouvert U de E. Si f est différentiable en x, alors elle est dérivable en x le long de toute direction, et on a $Df(x)(h) = \partial_h f(x)$ pour tout $h \in E$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \varphi(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Pour tout $h \in E$ fixé on a alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x) - t\varphi(h)}{t} = 0,$$

d'où le résultat. □

On voit aussitôt que si f est différentiable en un point, alors elle est continue en le même point. Cependant, l'existence des dérivées partielles, même le long de toutes les directions, ne suffit pas pour garantir la continuité. Voici un contre-exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si $h = (a,b)$ est un vecteur non-nul dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_h f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} = \begin{cases} a^2/b, & b \neq 0, \\ 0, & b = 0. \end{cases}$$

En particulier, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Cependant, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car elle n'est pas continue en $(0,0)$ (la suite $\big(f(1/n, 1/n^2)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $1/2$).

6.3. Critère de différentiabilité

Soient E un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{R}$. On fix une base $(e_i)_{i=1}^r$ de E. Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, on désigne par $e_i^\vee$ l'application linéaire de E vers $\mathbb{R}$ qui envoie $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ en λ_i.

Théorème 6.5. — *Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert non-vide U de E. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, la dérivée partielle $\partial_{e_i} f$ existe et définit une application continue sur U. Alors l'application f est différentiable sur U et on a*

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{e_i} f(x) e_i^\vee$$

quel que soit $x \in U$.

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| := \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|\}.$$

Soit h un vecteur dans E de la forme $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$. Soit a un élément de U. On a

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{r} f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i) - f(a + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1}).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} &\Big| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \partial_{e_i} f(a) \Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{r} \Big| f\Big(a + \sum_{j \leqslant i} \lambda_j e_j\Big) - f\Big(a + \sum_{j<i} \lambda_j e_j\Big) - \lambda_i \partial_{e_i} f(a) \Big|. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe des nombres $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tels que μ_i soit situé entre 0 et λ_i et que

$$\begin{aligned} &\Big| f\Big(a + \sum_{j \leqslant i} \lambda_j e_j\Big) - f\Big(a + \sum_{j<i} \lambda_j e_j\Big) - \lambda_i \partial_{e_i} f(a) \Big| \\ &= \Big| \lambda_i \partial_{e_i} f\Big(a + \mu_i e_i + \sum_{j<i} \lambda_j e_j\Big) - \lambda_i \partial_{e_i} f(a) \Big| \\ &= o(\|h\|), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

6.4. Gradient

Dans ce paragraphe, on fixe un espace vectoriel de rang fini E sur $\mathbb{R}$ et un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ sur E.

Proposition 6.6. — *L'application $\iota : E \to E^\vee$ qui envoie $x \in E$ sur la forme linéaire $(h \in E) \to \langle x, h \rangle$ est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire.*

Démonstration. — Il est facile de vérifier que l'application ι est $\mathbb{R}$-linéaire.

Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base orthonormée de E. Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, alors on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^r \varphi(e_i)e_i^\vee,$$

où $e_i^\vee(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r) = \lambda_i$. D'où

$$\varphi(u) = \left\langle \sum_{i=1}^r \varphi(e_i)e_i, u \right\rangle.$$

Cela montre que ι est surjective. Enfin, si x est un élément de E tel que $\iota(x)$ soit la forme linéaire nulle, alors on a $\langle x, x\rangle = 0$, d'où $x = 0$ car $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire. □

Définition 6.7. — Soient U un sous-ensemble ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, qui est différentiable en $x \in U$. On appelle *gradient de f par rapport au produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$* le vecteur $\iota^{-1}(Df(x)) \in E$, noté $\nabla f(x)$.

Remarque 6.8. — (a) Si $(e_i)_{i=1}^r$ est une base orthonormée de E, alors on a $\iota(e_i) = e_i^\vee$. D'après le théorème 6.5 on a

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^r \partial_{e_i} f(x) e_i.$$

(b) On suppose que $Df(x)$ est non-nul. Alors $\nabla f(x)$ maximise la fonction

$$(h \in E \setminus \{0\}) \longmapsto \frac{Df(x)(h)}{\|h\|}.$$

En d'autres termes, $\nabla f(x)$ est la direction dans laquelle la fonction croît le plus vite.