CHAPITRE 7

FONCTIONS DEUX FOIS DIFFÉRENTIABLES, EXTRÉMA

On fixe dans ce chapitre un espace vectoriel normé de rang fini $(E, \|\cdot\|)$.

7.1. Fonctions deux fois différentiables

Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U. On suppose que f est différentiable en un point $x \in U$. On dit que f est *deux fois différentiable* s'il existe une forme bilinéaire symétrique $D^2 f(x)$ sur E telle que

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2} H_f(x)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

La forme bilinéaire $H_f(x)$ est appelée la *hessienne* de f en x.

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si, pour tout $x \in U$, la hessienne $H_f(x)$ existe et H_f définit une application continue de U dans l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E, on dit que la fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^2$ sur U.

Proposition 7.1. — *Soient U un ouvert de E et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour tout couple (h_1, h_2) d'éléments dans E, on a*

$$\forall\, x \in U, \quad H_f(x)(h_1, h_2) = (\partial_{h_1} \partial_{h_2} f)(x).$$

Démonstration. — On fixe un point $x \in U$. Soient $\varphi = Df(x)$ et $b = H_f(x)$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme

$$\forall\, y \in U, \quad g(y) := f(y) - f(x) - \varphi(y-x) - \frac{1}{2} b(y-x, y-x).$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car f l'est. En outre, on a

$$g(y) = o(\|y-x\|^2).$$

En particulier, on a $\partial_{h_2} g(y) = o(\|y-x\|)$. Cela montre que $(\partial_{h_1} \partial_{h_2} g)(x) = 0$. Un calcul direct montre que

$$\partial_{h_2} g(y) = \partial_{h_2} f(y) - \varphi(y-x) - b(y-x, h_2).$$

Comme $\partial_{h_2} g$ est dérivable en x le long de h_1, il en est de même de $\partial_{h_2} f$, et on a

$$0 = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} g)(x) = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} f)(x) - \varphi(x - x) - b(h_1, h_2) = (\partial_{h_1}\partial_{h_2} f)(x) - b(h_1, h_2),$$

d'où le résultat. □

Proposition 7.2. — *Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si Df est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$. En outre, on a*

$$H_f(x)(h, h) = D^2 f(x)(h)(h)$$

pour tout $x \in U$ et $h \in E$.

Démonstration. — Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, Df définit une application continue de U dans $E^\vee$. En outre, on a

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 Df(x + th)(h)dt.$$

Comme Df est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$Df(x + th) = Df(x) + tD^2 f(x)(h) + o(\|h\|).$$

Donc

$$f(x + h) - f(x) = Df(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h)(h) + o(\|h\|^2),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 7.3. — *Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base de E. Si pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, r\}^2$, la fonction $\partial_{e_i}\partial_{e_j} f$ est bien définie et est une fonction continue sur U, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$. En outre, $((\partial_{e_i}\partial_{e_j} f)(x))_{(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2}$ est la matrice de la forme bilinéaire $H_f(x)$ par rapport à la base $(e_i)_{i=1}^r$.*

7.2. Étude locale des fonctions deux fois différentiables

Soient U un sous-ensemble non-vide de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $a \in A$ est un *point de maximum* (resp. *point de minimum*) de f si on a $f(a) \geqslant f(x)$ (resp. $f(a) \leqslant f(x)$) pour tout $x \in A$. On dit que $a \in A$ est un *point de maximum local* (resp. *point de minimum local*) s'il existe un voisinage V de a tel que a soit un point de maximum (resp. point de minimum) de $f|_{A\cap V}$.

Proposition 7.4. — *Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de E. Si $P \in U$ est un point de maximum ou minimum local et si f est différentiable en P, alors on a $Df(P) = 0$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que P est un point de maximum local. Soit $h \in E$. Pour $t > 0$ assez proche de 0, on a $f(P + th) \leqslant f(P)$. Donc

$$\partial_h f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+th) - f(P)}{t} \leqslant 0.$$

Par la même raison (pour $t < 0$), on obtient $\partial_h f(P) \geqslant 0$. Cela montre que $Df(P)(h) = \partial_h f(P) = 0$. □

Définition 7.5. — Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de E. On dit qu'un point $P \in U$ est un *point critique* de f si f est différentiable en P et si $Df(P) = 0$.

Théorème 7.6. — *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E. Soit P un point critique de f. On suppose que la fonction f est deux fois différentiable en P et que $H_f(P)$ (resp. $-H_f(P)$) est définie positive, alors P est un point de minimum (resp. maximum) local.*

Démonstration. — On suppose que $H_f(P)$ est définie positive. Comme $Df(P) = 0$ on a

$$f(P+h) - f(P) = H_f(P)(h,h) + o(\|h\|).$$

Comme $H_f(P)$ est définie positive, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|H_f(P)(h,h)\| \geqslant \varepsilon \|h\|^2.$$

Donc $f(P+h) - f(P) \geqslant 0$ pour $\|h\|$ assez petit. □

MP4: séance 8

CHAPITRE V Espace tangent

On fixe un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$

§1 Hyperplan affine

Def On appelle hyperplan affine dans E tout sous-ensemble de E qui est de la forme $H_{l,\alpha} := \{x \in E \mid l(x) + \alpha = 0\}$, où $l : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non-nulle, et α est une constante.

Remarque Si $\alpha = 0$, alors $H_{l,\alpha} = \operatorname{Ker} l$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - 1$ (car l est non-nul). On l'appelle hyperplan dans E.

En général, si $H_{l,\alpha}$ est un hyperplan affine, alors $H_{l,0}$ est appelé l'hyperplan associé à $H_{l,\alpha}$

Proposition Soient $H_{l,\alpha}$ un hyperplan dans E. Pour tout $x \in H_{l,\alpha}$ et tout $y \in H_{l,0}$, on a $x+y \in H_{l,\alpha}$

Preuve $l(x+y) = l(x) + l(y) = l(x)$ car $l(y) = 0$

Donc $l(x+y) + \alpha = l(x) + \alpha = 0$

§2 Hypersurface

Définition On appelle hypersurface dans E tout sous-ensemble S de E qui est de la forme $S = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, où $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, appelée fonction implicite de S. On utilise $S(f)$ pour souligner la fonction implicite

Remarque La fonction implicite n'est pas unique. Par exemple, si f est une fonction implicite de S, alors f^2 l'est aussi.

Déf Soient S une hypersurface de E et f une fonction implicite de S. On dit que $x \in S$ est un point régulier par rapport à f si f est différentiable en x et si $Df(x)$ est une forme linéaire non-nul.

Exemple Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2 - 1$.

On a $Df(x)(\cdot) = 2\langle x, \cdot \rangle$. Donc tout point de $S(f)$ est régulier.

MP4: séance 8

§3 Espace tangent

Def Soient S une hypersurface et f sa fonction implicite. Si $x_0 \in S$ est un point régulier par rapport à f, on appelle espace tangent de S en x_0 l'hyperplan affine $\{x \in E \mid Df(x_0)(x-x_0) = 0\}$, noté $T_{x_0}S$

Exemple On considère la fonction $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$. $S = S(f)$

On a $Df(x)(\cdot) = 2\langle x, \cdot \rangle$. Pour tout $x_0 \in S$, on a

$$T_{x_0}S = \{x \in E \mid \langle x_0, x - x_0\rangle = 0\} = \{x \in E \mid \langle x_0, x\rangle = 1\}$$

C'est l'hyperplan passant par x_0 qui est orthogonal à x_0.

§4 Graphe

Def Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle graphe de φ le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ de la forme $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in E\}$, noté Γ_φ

C'est une hypersurface de $E \times \mathbb{R}$ car $\Gamma_\varphi = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) - t = 0\}$

La fonction implicite $f_\varphi(x,t) := \varphi(x) - t$ de Γ_φ est dite canonique

Prop: Si la fonction φ est différentiable en $x_0 \in E$, alors Γ_φ est régulière en $(x_0, \varphi(x_0))$ par rapport à f_φ. En outre, l'espace tangent de Γ_φ en $(x_0, \varphi(x_0))$ est $\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid \varphi(x_0) + D\varphi(x_0)(x-x_0) - t = 0\}$

Preuve On a $f_\varphi(x,t) - f_\varphi(x_0, \varphi(x_0)) = \varphi(x) - t = \varphi(x_0) + D\varphi(x_0)(x-x_0) - t + o(\|x - x_0\|)$

§5 Application de Gauss

Def Soit S une hypersurface dans E et f sa fonction implicite. On suppose que S est régulière. On définit

$$G : S \longrightarrow S_1 := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$$
$$x \longmapsto \mathrm{grad}_x f / \|\mathrm{grad}_x f\|$$