# CHAPITRE 1

# ESPACES PRÉHILBERTIENS

## 1.1. Formes bilinéaires

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

***Définition 1.1***. — On appelle *forme linéaire* sur $E$ toute application $\mathbb{R}$-linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $E^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur $E$. Cet ensemble est stable par addition et par multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}$. Il est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

***Exemple 1.2***. — (1) Soient $E = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

est une forme linéaire sur $E$.

(2) Soient $\Omega$ un ensemble non-vide et $E$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles sur $\Omega$. Soit $\omega$ un élément de $\Omega$. L'application $\lambda_\omega : E \to \mathbb{R}$, $\lambda_\omega(f) := f(\omega)$ est une forme linéaire sur $E$.

(3) Soit $C^0([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. L'application $I : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$I(f) := \int_0^1 f(t)dt$$

est une forme linéaire.

***Définition 1.3***. — On appelle *forme bilinéaire* sur $E$ toute application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $x \in E$, $b(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire,

(ii) pour tout $y \in E$, $b(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

Étant donnée une forme bilinéaire $b$ sur $E$, on dit que $b$ est *symétrique* si $b(x,y) = b(y,x)$ pour tout $(x,y) \in E^2$ ; on dit que $b$ est *positive* si $b(x,x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ ; on dit que $b$ est *définie* si $b(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On désigne par $\mathrm{Bil}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

***Exemple 1.4.*** — (1) Soit $n$ un entier, $n \geqslant 1$. Soit $A$ une matrice réelle de taille $n \times n$, alors l'application

$$b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad b_A\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) := (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, appelée *forme bilinéaire associée à la matrice $A$*. Elle est symétrique si et seulement si la matrice $A$ est symétrique.

(2) Soit $E = C^0([0,1])$. L'application

$$\langle\, ,\, \rangle : E \times E \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire sur $C^0([0,1])$. Elle est symétrique et définie positive.

(3) Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux formes linéaires sur $E$, alors l'application

$$\varphi \otimes \psi : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (\varphi \otimes \psi)(x,y) := \varphi(x)\psi(y)$$

est une forme bilinéaire sur $E$, appelée *produit tensoriel de $\varphi$ et $\psi$*. Si $E$ est de rang fini sur $\mathbb{R}$, alors toute forme bilinéaire sur $E$ est une combinaison linéaire de produits tensoriels de formes linéaires.

## 1.2. Produit scalaire

Dans la suite de la séance, $k$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***Définition 1.5.*** — Soit $E$ un espace vectoriel sur $k$. On appelle *produit scalaire* sur $E$ toute application $\langle\, ,\, \rangle : E \times E \to k$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) pour tout $x \in E$, l'application $\langle x, \cdot\rangle : E \to k$ est $k$-linéaire,

(ii) pour tout $(x,y) \in E \times E$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(iii) pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, le nombre $\langle x, x\rangle$ est réel, et on a $\langle x, x\rangle > 0$.

On appelle *espace préhilbertien* sur $k$ tout espace vectoriel $E$ sur $k$ muni d'un produit scalaire.

***Remarque 1.6.*** — (1) Dans le cas où $k = \mathbb{R}$, un produit scalaire est simplement une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

(2) Soit $E$ un espace préhilbertien sur $k$ qui est de rang fini sur $k$. Si $k = \mathbb{R}$, on dit aussi que $E$ est un *espace euclidien* ; si $k = \mathbb{C}$, on dit aussi que $E$ est un espace hermitien.

(3) Si $x$, $y$ et $z$ sont trois éléments de $E$ et si $\lambda$ et $\mu$ sont deux éléments de $k$, alors

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle + \overline{\mu}\langle y, z\rangle.$$

***Exemple 1.7.*** — (1) $E = k^n$, où $n \in \mathbb{N}$. L'application $\langle\ ,\ \rangle : k^n \times k^n \to k$,

$$\langle (z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)\rangle := \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j w_j$$

est un produit scalaire sur $E$.

(2) On désigne par $\ell^2(k)$ l'ensemble des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $k$ tells que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^2$ converge. L'application $\langle\ ,\ \rangle_{\ell^2} : \ell^2(k) \times \ell^2(k) \to k$,

$$\langle (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{\ell^2} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{z}_n w_n$$

est un produit scalaire sur $\ell^2(k)$.

(3) Soit $C^0([0, 1], k)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $k$. L'application $\langle\ ,\ \rangle_{L^2} : C^0([0, 1], k) \times C^0([0, 1], k) \to k$,

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$$

est un produit scalaire sur $C^0([0, 1], k)$.

***Théorème 1.8*** **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**. — *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Si $x$ et $y$ sont deux éléments de $E$, on a*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

*Démonstration.* — Si $y = 0$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ et donc l'inégalité est triviale. Dans la suite, on suppose $y \neq 0$. Soit

$$\lambda = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle y, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 1.3. Norme

***Définition 1.9.*** — Soit $E$ un espace vectoriel sur $k$. On appelle *semi-norme* sur $E$ toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in k$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(2) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Si de plus $\|x\| > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on dit que $\|\cdot\|$ est une *norme* et que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

***Exemple 1.10.*** — Soient $E$ un espace vectoriel de rang fini sur $k$, et $(e_i)_{i=1}^r$ une base de $E$, alors l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$, $\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\| = \max(|a_1|, \ldots, |a_r|)$ est une norme sur $E$.

***Proposition 1.11.*** — *Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors l'application $\|\cdot\|$ : $E \to \mathbb{R}_+$, $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ est une norme.*

*Démonstration.* — Si $x \in E$ et si $\lambda \in k$, on a

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \cdot \|x\|^2.$$

Si $x$ et $y$ sont deux éléments de $E$, on a

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin, si $\|x\| = 0$, alors $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, et donc $x = 0$. □

***Définition 1.12.*** — Soient $E$ un espace vectoriel sur $k$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $E$. On dit que la norme $\|\cdot\|$ est *préhilbertienne* s'il existe un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ tel que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pour tout $x \in E$.

## 1.4. Orthogonalité

***Définition 1.13.*** — Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace préhilbertien sur $k$.

On dit que deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$, noté $x \perp y$. Comme $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pour tout $(x, y) \in E^2$, on obtient que $\langle x, y\rangle = 0$ si et seulement si $\langle y, x\rangle = 0$. Autrement dit, l'orthogonalité est une relation binaire symétrique.

Soient $x$ un élément de $E$ et $A$ un sous-ensemble de $E$. Si, pour tout $y \in A$, on a $x \perp y$, on dit que $x$ est *orthogonal* à $A$, noté $x \perp A$.

On dit qu'un sous-ensemble $B$ de $E$ est une *famille orthogonale* si pour tout couple $(x, y) \in B^2$, $x \neq y$, on a $\langle x, y\rangle = 0$. Si de plus on a $\|x\| = 1$ pour tout $x \in B$, on dit que $B$ est une *famille orthonormée.*

***Proposition 1.14.*** — *Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace préhilbertien sur $k$.*

(1) *Si un élément $x \in E$ est orthogonal à un sous-ensemble $A$ de $E$, il est aussi orthogonal au sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $A$. En d'autres termes, on a $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.*

(2) *Si $A$ est un sous-ensemble de $E$, alors l'ensemble $A^\perp$ des éléments de $E$ orthogonaux à $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

(3) *Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une famille orthogonale de vecteurs dans $E$, alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$, on a*

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \cdot \|x_j\|^2. \tag{1.1}$$

(4) *Toute famille orthogonale de vecteurs* non-nuls *dans $E$ est libre.*

*Démonstration.* — (1) Soient $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $A$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, alors

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, y_j \rangle = 0.$$

(2) Si $x$ et $y$ sont deux éléments de $A^\perp$, $\lambda$ et $\mu$ sont deux éléments de $k$, pour tout $z \in A$ on a

$$\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle.$$

Par conséquent, $\lambda x + \mu y \in A^\perp$.

(3) On raisonne par récurrence sur $n$. Le cas où $n = 1$ est trivial. Traitons le cas où $n = 2$. On a

$$\begin{aligned}\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|^2 &= \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1}\lambda_1 \|x_1\|^2 + \overline{\lambda_2}\lambda_2 \|x_2\|^2 + \overline{\lambda_1}\lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle + \overline{\lambda_2}\lambda_1 \langle x_2, x_1 \rangle.\end{aligned}$$

Comme $x_1$ et $x_2$ sont orthogonaux, on a $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle = 0$. Par conséquent, on a

$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|^2 = |\lambda_1|^2 \cdot \|x_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \cdot \|x_2\|.$$

Dans la suite, on considère le cas où $n > 2$ en supposons que l'énoncé est vrai pour $n-1$ vecteurs orthogonaux. Par les énoncés (1) et (2), on obtient que $\lambda_n x_n$ est orthogonal à $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}$, d'où (par le cas où $n = 2$)

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}\|^2 + |\lambda_n|^2 \cdot \|x_n\|^2.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on obtient le résultat.

(4) Soit $B$ une famille orthogonale de vecteurs non-nuls dans $E$. On suppose que $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments non-nuls de $B$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$ est tel que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Par l'énoncé (3) on obtient

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \cdot \|x_j\|^2 = 0.$$

Donc on a $|\lambda_j| \cdot \|x_j\| = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $x_j \neq 0$, on a $\|x_j\| > 0$ et donc $|\lambda_j| = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. □

***Proposition 1.15***. — *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien sur* $k$.

*(1) Si* $A$ *et* $B$ *sont deux sous-ensembles de* $E$ *tels que* $A \subset B$*, alors on a* $B^\perp \subset A^\perp$.

*(2) Si* $F$ *est un sous-espace vectoriel de* $E$*, alors on a* $F \cap F^\perp = \{0\}$.

*Démonstration.* — (1) Comme $A \subset B$, tout vecteur orthogonal à $B$ est orthogonal à $A$.

(2) Soit $x$ un vecteur dans $F \cap F^\perp$. On a

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0.$$

Donc $x = 0$. □

***Théorème 1.16* (Inégalité de Parseval)**. — *Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertienne,* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *une famille orthonormée dans* $E$ *et* $F$ *le sous-espace vectoriel engendré par* $e_1, \ldots, e_n$*. Soit* $x$ *un élément de* $E$.

*(1) Le vecteur*

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j$$

*est l'unique vecteur dans* $F$ *tel que*

$$x - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j$$

*soit orthogonal à* $F$.

*(2) On a*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2,$$

*l'égalité est satisfaite si et seulement si* $x \in F$*. De plus, dans le cas où* $x \in F$ *on a*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j.$$

*Démonstration.* — Soit

$$y = x - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j.$$

(1) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\langle e_j, y\rangle = \langle e_j, x\rangle - \sum_{l=1}^{n} \langle e_l, x\rangle \langle e_j, e_l\rangle = \langle e_j, x\rangle - \langle e_j, x\rangle = 0.$$

D'après la proposition 1.14 (1), $y$ est orthogonal à $F$. Si $y' = x - z$ est un autre élément orthogonal à $F$, où $z \in F$. On a

$$y - y' \in F \cap F^\perp.$$

Donc $y - y' = 0$ et $y = y'$.

(2) D'après la proposition 1.14 (3), on a

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2.$$

Si l'égalité est satisfaite, alors on a $\|y\| = 0$ et donc $y = 0$. Cela revient à dire que

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j \in F.$$

Réciproquement, si $x \in F$, alors il est de la forme $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, d'où $\lambda_j = \langle e_j, x\rangle$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et on a

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2.$$

□

***Corollaire 1.17***. — *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $B$ une famille orthonormée dans $E$. Pour tout vecteur $x \in E$ on a*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{e \in B} |\langle e, x\rangle|^2.$$

## 1.5. Orthogonalisation de Gram-Schmidt

***Théorème 1.18***. — *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien de rang fini sur $k$ et $(v_j)_{j=1}^n$ une base de $E$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ soit $E_j$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $v_1, \ldots, v_j$ (dans le cas où $j = 0$, on a $E_0 = \{0\}$ par convention). Il existe une unique famille* orthogonale *$(w_j)_{j=1}^n$ dans $E$ qui satisfait aux conditions suivantes :*

*(1) pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $w_j - v_j \in E_{j-1}$,*

*(2) pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{w_1, \ldots, w_j\}$ forme une base de $E_j$.*

*En particulier, tout espace préhilbertien de rang fini possède une base qui est une famille orthonormée (appelée* base orthonormée*).*

*Démonstration*. — On construit les vecteurs $w_j$ par récurrence : on prend $w_1 = v_1$ et

$$w_{j+1} = v_{j+1} - \sum_{l=1}^{j} \frac{\langle v_l, e_j\rangle}{\|v_l\|^2} v_l = e_j - \sum_{l=1}^{j} \Big\langle \frac{v_l}{\|v_l\|}, e_j \Big\rangle \frac{v_l}{\|v_l\|}. \tag{1.2}$$

pour $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Par construction on a $w_j - v_j \in E_{j-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et donc $\{w_1, \ldots, w_j\}$ forme une base de $E_j$. D'après le théorème 1.16, le vecteur $w_{j+1}$ est orthogonal à $E_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. L'unicité est garantie par la proposition 1.16 (1).

Enfin, les vecteurs $w_j/\|w_j\|$ forment une base de $E$ qui est une famille orthonormée. $\square$

## 1.6. Projection orthogonale

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien sur $k$ et $F$ un sous-espace vectoriel de rang fini de $E$. D'après le théorème 1.2, il existe un base orthonormée de $F$. D'après le théorème 1.16, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur dans $F$, que l'on note $p_F(x)$, tel que $x - p_F(x)$ soit orthogonal à $F$. Le vecteur $p_F(x)$ est appelé *projection orthogonale* de $x$ dans $F$. Le vecteur $s_F(x) := 2p_F(x) - x$ est appelé le *symétrique orthogonal* de $x$ par rapport à $F$.

***Proposition 1.19.*** — *(1) Les applications $p_F : E \to E$ et $s_F : E \to E$ sont $k$-linéaires.*

*(2) Le noyau de $p_F$ est $F^\perp$ ; le noyau de $p_F - \mathrm{Id}_E$ est $F$.*

*(3) On a $p_F^2 = p_F$.*

*(4) L'application $s_F$ préserve le produit scalaire. En d'autres termes, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle s_F(x), s_F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.*

*Démonstration.* — (1) Soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$, $\lambda$ et $\mu$ des éléments de $k$. On a

$$(\lambda x + \mu y) - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)),$$

qui est orthogonal à $F$. Par l'unicité de la projection orthogonale, on obtient

$$p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y).$$

Comme $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$, on obtient que $s_F$ est aussi $k$-linéaire.

(2) Tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique comme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. De plus on a $y = p_F(x)$. En particulier, $p_F(x) = x$ si et seulement si $x \in F$ ; et $p_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F^\perp$.

(3) Pour tout $x \in E$, on a $p_F(x) \in F$. Donc $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$.

(4) On a

$$\begin{aligned}
&\langle s_F(x), s_F(y)\rangle = \langle 2p_F(x) - x, 2p_F(y) - y\rangle \\
&= \langle p_F(x), p_F(y)\rangle + \langle p_F(x) - x, p_F(y) - y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle - \langle x, p_F(y) - y\rangle \\
&= \langle p_F(x) - x, p_F(y)\rangle + \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$