SN4: séance 2

2018年1月13日 20:21

§1 Calculs itératifs

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de récurrence
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple $u_0 = 2$, $u_{n+1} = |\ln(u_n)|$.

Dans l'ordinateur, une autre suite est produit : $v_0 = \tilde{u}_0$, $v_{n+1} = \widetilde{f(v_n)}$

L'erreur de calcul dans la $n^{\text{ième}}$ étape est
$$|v_n - u_n| = |f(u_{n-1}) - \widetilde{f(v_{n-1})}| \leq |f(u_{n-1}) - f(v_{n-1})| + \Delta(f(v_{n-1}))$$

Il y a donc deux sources d'erreurs : ① stockage de la valeur de f en $n^{\text{ième}}$ étape
② erreur cumulative sur la variable de f dans le calcul de la $n^{\text{ième}}$ étape.

L'erreur de deuxième type est contrôlée par la dérivée de f (si f est dérivable)

Si $|f'(u_{n-1})|$ est très grand, on peut observer une erreur importante dans l'approximation de u_n par v_n.

Déf On appelle espace métrique tout ensemble E muni d'une application $d : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $\forall (x,y)\in E^2$, $d(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$

(2) $\forall (x,y)\in E^2$, $d(x,y)=d(y,x)$

(3) inégalité triangulaire : $\forall (x,y,z)\in E^3$, $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

Exemple
- $E=\mathbb{R}^n$, $d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left((x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $E = C^0([a,b])$ où $(a,b)\in\mathbb{R}$, $a<b$,
  $\forall (f,g)\in C^0([a,b])^2$, $d(f,g) := \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|$
- $E = C^0([a,b])$ $\forall (f,g)\in E^2$, $d(f,g) := \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$

Déf Soit (E,d) un espace métrique. Si $x\in E$ et $r>0$, on définit
$$B(x;r) := \{y\in E \mid d(x,y)<r\}$$ (boule centrée en x et de rayon r)

Soit $x\in E$, on appelle voisinage de x toute partie V de E qui contient une boule centrée en x.

On dit qu'une partie U de E est un ouvert s'il est voisinage de tous ses point.

$F\subset E$ est dit fermé si F^c est un ouvert.

Soit (E,d) un espace métrique. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E et $x\in E$.
On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x ou x est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, on dit qu'elle est convergente (dans E)

Remarque Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si elle est convergente, alors sa limite est unique. En effet, si x et y sont des limites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0\leq d(x,y) \leq d(x_n,x)+d(x_n,y)$. Par passage à la limite quand $n\to\infty$, on obtient $d(x,y)=0$ et donc $x=y$.

Déf Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est une suite de Cauchy si $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n,\, \ell\geq n} d(x_k,x_\ell)=0$
On dit que l'espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Remarque Soit (E,d) un espace métrique (non-nécessairement complet). Toute suite convergente dans E est une suite de Cauchy. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in E$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $(k,\ell)\in\mathbb{N}_{\geq n}$ on a

$$d(x_k,x_\ell)\leq d(x_k,x)+d(x_\ell,x)\leq 2\sup_{m\geq n} d(x_m,x)$$

et donc $\sup_{k\geq n,\,\ell\geq n} d(x_k,x_\ell)\leq 2\sup_{m\geq n} d(x_m,x)$

Par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Déf Soient (E,d) un espace métrique et $\varphi: E\to E$ une application.
On dit que $x\in E$ est un point fixe de φ si $\varphi(x)=x$
On dit que φ est contractante s'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que

$$\forall\ (x,y)\in E^2,\quad d(\varphi(x),\varphi(y))\leq \alpha\, d(x,y)$$

Proposition Soient (E,d) un espace métrique et $\varphi: E\to E$ une application. Si φ est contractante, alors elle est continue (i.e. pour toute suite $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ dans E qui converge vers $x\in E$, la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(x)$).

Preuve Pour $n\in\mathbb{N}$ on a $0\leq d(\varphi(x_n),\varphi(x))\leq \alpha\, d(x_n,x)$

Théorème Soient (E, d) un espace métrique non-vide complet, et $\varphi : E \to E$ une application contractante. Alors φ admet un unique point fixe x. En outre, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$ converge vers le point fixe x de φ.

Preuve On commence par l'unité. Si x et y sont deux points fixes de φ alors on a $d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$, d'où $d(x, y) = 0$.

Soit $x_0 \in E$ quelconque. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dans E définie par $x_n = f(x_{n-1})$. Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ on a $d(x_n, x_{n+1}) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)) \leq \alpha\, d(x_{n-1}, x_n)$,

d'où $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$. On en déduit que, pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ avec $k < l$, on a

$$d(x_k, x_l) \leq \sum_{i=k}^{l-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{j=k}^{l-1} \alpha^i d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{k\geq n,\, l\geq n} d(x_k, x_l) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy, qui converge vers un point $x \in E$. Il reste à montrer que x est un point fixe de φ. Comme φ est continue, on a $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. ✗

Remarque ① Vitesse de convergence : $d(x_n, x) = d(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x)) \leq \alpha\, d(x_{n-1}, x)$

Donc $d(x_n, x) \leq \alpha^n d(x_0, x)$.

② Le théorème reste valable si on suppose seulement que φ est continue et qu'il existe $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tel que $\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{m \text{ copies}}$ est contractante.

En effet, par le théorème φ^m admet un unique point fixe x.

On a $\varphi^m(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^m(x)) = \varphi(x)$ et donc $\varphi(x) = x$ par l'unicité de point fixe de φ^m. Enfin, pour tout point de départ $x_0 \in E$ la suite $(x_{mp} = \varphi^{mp}(x_0) = (\varphi^m)^p(x_0))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe x. Donc pour tout $r \in \{0, \ldots, m-1\}$, $(x_{mp+r} := \varphi^{mp+r}(x_0) = \varphi^r(x_{mp}))_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $\varphi^r(x) = x$.

SN4: séance 2

2018年1月13日 20:21

§ 4 Recherche des points de zéro

<u>Problème</u> Résoudre numériquement l'équation $f(x)=0$ d'une variable réelle sur un intervalle $[a,b]$, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$, $a<b$.

On suppose que f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ et $f(a)<0$ et $f(b)>0$.

Ainsi f admet un unique point de zéro dans $[a,b]$.

On fixe aussi un seuil de précision ε

① Méthode "naïve"

On pose $x_0 = a$ et $y_0 = b$.

En $n^{\text{ième}}$ étape, on prend $z_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$

Si $f(z_{n-1}) = 0$, alors z_{n-1} est le point de zéro cherché.

Si $f(z_{n-1}) f(x_{n-1}) > 0$, on prend $x_n = z_{n-1}$, $y_n = y_{n-1}$

Si $f(z_{n-1}) f(y_{n-1}) > 0$, on prend $x_n = x_{n-1}$, $y_n = z_{n-1}$

Si $y_n - x_n < \varepsilon$, alors $z_n = \dfrac{x_n+y_n}{2}$ est le point de zéro approximé.

Vitesse de convergence : Si α est le vrai point de zéro, alors $|z_n - \alpha| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$.

② Méthode par le théorème de point fixe

Soit C une constante réelle non-nulle. On définit $\varphi_C(x) = x - C f(x)$.

Alors α est un point de zéro de f $\Leftrightarrow$ $\varphi_C(\alpha) = \alpha$.

Pour appliquer le théorème de point fixe, il faut que

- φ_C envoie $[a,b]$ dans $[a,b]$
- φ_C est contractante

On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et $0 < m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x.

$$\varphi_C'(x) = 1 - C f'(x) \Rightarrow 1 - CM \leq \varphi_C'(x) \leq 1 - Cm$$

On prend $C = \frac{1}{M}$. alors $0 \leq \varphi_C'(x) \leq 1 - \frac{m}{M} < 1$

De plus, $\varphi_C(a) = a - C f(a) > a$ $\quad \varphi_C(b) = b - C f(b) < b$

Comme φ_C est croissante, on a $\varphi_C([a,b]) \subset [a,b]$

Le théorème des accroissements finis montre que φ_C est contractant.

Vitesse de convergence : On prend $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $x_n = \varphi_C^n(x_0)$. Alors

$$|x_n - \alpha| \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n |x_0 - \alpha|.$$