SN4: séance 3

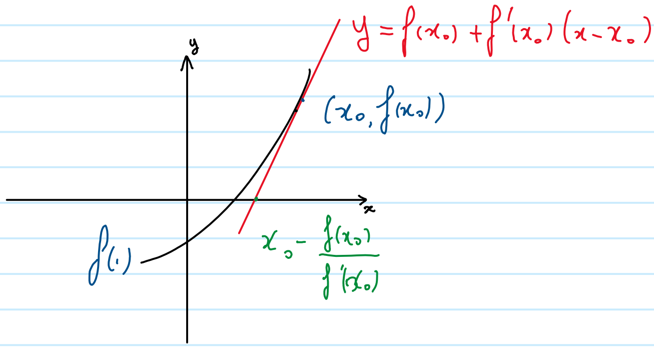
2018年1月13日 20:21

§3 Méthode de Newton.

Rappel : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On cherche à calculer numériquement l'unique point de zéro α de f sur $]a,b[$

Méthode de Newton : On suppose que f est de classe C^2 et $f'(\alpha) \neq 0$.

Considérons la fonction $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$



On commence par $x_0 \in]a,b[$ et on pose $x_n = \varphi^n(x_0)$.

Étude de la fonction φ. On a $\varphi(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$ et $\varphi(b) = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} < b$.

Cependant, cela ne guarentie pas que $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$

On a $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$

Hypothèse : $f' \neq 0$ sur $[a,b]$. On note $M = \sup_{x \in I} \left| \dfrac{f''(x)}{f'(x)} \right|$

Lemme 1 Soit $u = \dfrac{f}{f'}$. On a $|u(x)| \leq \dfrac{1}{M}\left(e^{M|x-\alpha|} - 1\right)$

Preuve $u'(x) = 1 - \dfrac{f''(x)}{f'(x)} u(x)$. Donc $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$

Soit $v(x) = u(x) e^{-Mx}$. On a $v'(x) = \left(u'(x) - Mu(x)\right)e^{-Mx} \leq e^{-Mx}$ $(x \geq \alpha)$

Comme $v(\alpha) = u(\alpha) = 0$, $v(x) = \int_\alpha^x v'(t)\,dt \leq \frac{1}{M}\left(e^{-M\alpha} - e^{-Mx}\right)$

Ce qui montre que $u(x) \leq \frac{1}{M}\left(e^{M(x-\alpha)} - 1\right)$ pour $x \geq \alpha$.

Si $x < \alpha$, $u(x) < 0$. Donc $u'(x) \leq 1 - Mu(x)$.

Soit $w(x) = u(x) e^{Mx}$. $w'(x) = \left(u'(x) + Mu(x)\right)e^{Mx} \leq e^{Mx}$ $(x \leq \alpha)$

Comme $w(\alpha) = u(\alpha) = 0$ $w(x) = -\int_x^\alpha w'(t)\,dt \geq -\int_x^\alpha e^{Mt}\,dt = \frac{1}{M}\left(e^{Mx} - e^{M\alpha}\right)$

Cela montre que $u(x) \geq \frac{1}{M}\left(1 - e^{M(\alpha - x)}\right)$

※

Lemme 2 Soit $h = \min\left(b-a, \frac{1}{M}\right)$. Pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$ on a $|\varphi(x) - \alpha| \leq M|x-\alpha|^2$

Preuve Pour tout $t \in [0,1]$, $e^a \leq (e-1)a + 1 \leq 2a + 1$. Donc $|u(x)| \leq 2|x-\alpha|$ et $|\varphi'(x)| \leq 2M|x-\alpha|$

$|u(x)||f''(x)/f'(x)|$

On en déduit que $|\varphi(x) - \alpha| \leq M|x-\alpha|^2$

Conclusion Si on commence par un point x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{M}$, alors
$|x_n - \alpha| \leq (M|x_0 - \alpha|)^{2^n}$.

La vitesse de convergence est très rapide (double exponentielle)!

§4 Méthode de la sécante

La méthode de Newton demande une connaissance sur f'. Dans certaines situations f' est impossible à expliciter et difficile à calculer.

Idée: remplacer f' par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle.

On suppose donnés deux points de départ x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, $f(x_0) < 0$ et $f(x_1) > 0$.

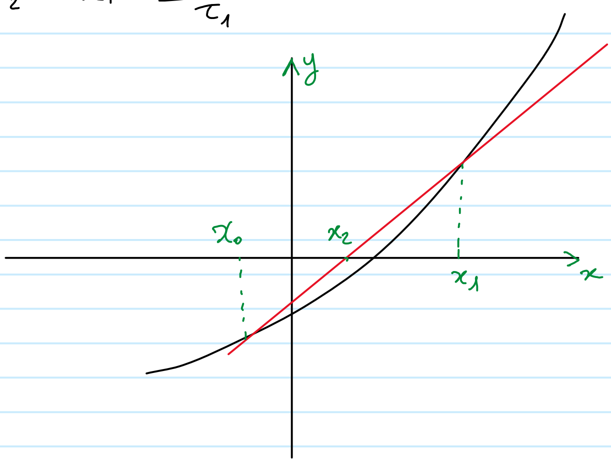
Le taux d'accroissement de f sur $[x_0, x_1]$ est $\tau_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

L'équation de la sécante traversant le graphe de f aux points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ est

$$y = \tau_1 (x - x_1) + f(x_1)$$

L'abscisse de l'intersection de la sécante avec l'axe Ox est

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\tau_1}$$



On itère ce procédé en posant

$$\tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n}$$

Remarque Si x_{n-1} et x_n sont trop proches, il n'est plus efficace d'approximer la dérivée par le taux d'accroissement. En pratique, si $f(x_n)$ est calculé numériquement avec une erreur d'arrondi de l'ordre ε, alors l'erreur absolue du calcul de τ_n est d'ordre $\varepsilon / |x_n - x_{n-1}|$. Il est donc peu efficace si $|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\varepsilon}$. (On prend juste $\tau_n = \tau_{n-1}$)

SN4: séance 3

2018年1月13日 20:21

CHAPITRE III Approximation de fonctions

§1 Méthode d'interpolation

Notation On fixe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. On désigne par $C^0([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathbb{R}[T]_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

On a une application linéaire injective
$$\begin{aligned}\mathbb{R}[T] &\longrightarrow C^0([a,b])\\ P &\longmapsto \big((t\in[a,b])\mapsto P(t)\big)\end{aligned}$$

$C^0([a,b])$ est muni de la norme sup $\|\cdot\|_{\sup}$

$$\forall f\in C^0([a,b]),\quad \|f\|_{\sup}=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

Soient $x_0,\dots,x_n$ des points distincts de $]a,b[$. Pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, soit φ_i la forme linéaire sur $C^0([a,b])$ qui envoie $f\in C^0([a,b])$ sur $f(x_i)$

Pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$, soit $P_i\in\mathbb{R}[T]_n$ défini par
$$P_i(T)=\prod_{j\neq i}\frac{T-x_j}{x_i-x_j}$$

On a $P_i(x_i)=1$ et $P_i(x_j)=0$ pour $j\neq i$.

Problème d'interpolation Soit $f\in C^0([a,b])$. On cherche $P\in\mathbb{R}[T]_n$ tel que
$$f(x_i)=P(x_i)\quad\text{quel que soit } i\in\{0,\dots,n\}.$$

Théorème Le problème d'interpolation admet une solution et une seule, donnée par la formule $P=f(x_0)P_0+\dots+f(x_n)P_n$

Preuve Par définition, P est une solution au problème d'interpolation.

Si Q est une autre solution, alors $P-Q$ s'annule en $x_0,\dots,x_n$. Comme $P-Q$ est de degré $\leq n$, on a $P=Q$. ✻

Estimation d'erreur

Lemme Supposons que g est une fonction $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $g(x_0)=\dots=g(x_n)=0$. Alors il existe $\xi\in]a,b[$ tel que $g^{(n)}(\xi)=0$

Preuve On raisonne par récurrence sur n. Si $n=1$, le lemme résulte du théorème de Rolle.

Supposons que le lemme est démontré pour $n-1$. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0<x_1<\dots<x_n$. Par le théorème de Rolle, il existe $y_i\in]x_{i-1},x_i[$, $i\in\{1,\dots,n\}$, tels que $g'(y_1)=\dots=g'(y_n)=0$. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient le résultat. ✻

SN4: séance 3

2018年1月13日 20:21

Théorème On suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$.

Pour tout $x \in]a,b[$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} \omega(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

où $\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$

Preuve Si $x \in \{x_0, \cdots, x_n\}$, alors le théorème est trivial : on peut prendre n'import quel $\xi \in]a,b[$. Dans la suite, on suppose que $x \notin \{x_1, \cdots, x_n\}$

Soit g la fonction sur $[a,b]$ définie par

$$g(t) = \omega(x)\left(f(t) - P(t)\right) - \omega(t)\left(f(x) - P(x)\right).$$ Par définition, $g(x) = 0$

De plus, $g(x_i) = 0$ pour tout $x \in \{0, \cdots, n\}$. Donc il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Un calcul direct montre que

$$g^{(n+1)}(t) = \omega(x) f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\left(f(x) - P(x)\right).$$

D'où le résultat.

Corollaire $\|f - P\|_{sup} \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\omega\|_{sup} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{sup}$

Remarque La majoration d'erreur contient

$\|\omega\|_{sup}$ qui dépend du choix des points d'interpolation

$\|f^{(n+1)}\|_{sup}$ qui dépend de la fonction f.