SN4: séance 4

2018年1月13日 20:21

§2 Calcul du polynôme d'interpolation

On fixe $x_0, \ldots, x_n$ une famille de nombres réels distincts.

On a vu dans la séance précédent que, pour tout $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}[T]_n$ tel que $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $P(x_i) = y_i$.

On a

$$P(T) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j \in \{0,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \frac{T - x_j}{x_i - x_j} . \qquad (*)$$

Pour calculer la valeur de P en un point $x \in \mathbb{R}$, la complexité de calcul est $O(n^3)$

Question : peut-on avoir un algorithme plus rapide ?

Dans la suite, on fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x_0, \ldots, x_n) \in [a,b]^{n+1}$ dont les coordonnées sont distinctes, on définit $f[x_0, \ldots, x_n]$ comme le coefficient de T^n de l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[T]_n$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Par $(*)$, on obtient

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j \in \{0,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j}$$

Proposition On a

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Preuve

$$f[x_0, \ldots, x_n](x_n - x_0) = f(x_n) \prod_{j \in \{1,\ldots,n-1\}} \frac{1}{x_n - x_j} - f(x_0) \prod_{j \in \{1,\ldots,n-1\}} \frac{1}{x_0 - x_j}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \Bigg(\prod_{\substack{j \in \{0,\ldots,n\} \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \Bigg) (x_n - x_i + x_i - x_0)$$

$$= f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]$$

$\#$

Remarque On a $f[x_i] = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Dans la pratique, les coefficients sont calculés de façon récursive comme suit

SN4: séance 4

2018年1月13日 20:21

Étape 0	Étape 1	Étape 2		Étape n
$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$\cdots$	$f[x_0,\dots,x_n]$
$f(x_{n-1})$	$f[x_{n-2},x_{n-1}]$	$\vdots$		
$f(x_{n-2})$	$\vdots$			
$\vdots$				
$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
$f(x_0)$				

Prop. $$P_n(T) = \sum_{i=0}^{n} f[a_0,\dots,a_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x-a_j)$$

Preuve On raisonne par récurrence sur n. Le cas où $n=0$ est trivial.
Supposons $n\geq 1$. $P_n - P_{n-1}$ est un polynôme de degré $\leq n$ qui s'annule en $x_0,\dots,x_{n-1}$. Donc $P_n(T)-P_{n-1}(T) = \alpha\,(T-x_0)\cdots(T-x_{n-1})$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
En outre, $P_n(T)-P_{n-1}(T)$ et $P_n(T)$ admet le même coefficient de T^n. Donc
$\alpha = f[a_0,\dots,a_n]$ ※

§3 Interpolation aux points de Tchebychev

Pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit
$$C_n(x) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}(x)) \qquad x\in[-1,1]$$

Prop. $C_0(x)=1$, $C_1(x)=x$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, on a
$$C_{n+1}(x) - 2x\,C_n(x) + C_{n-1}(x) = 0$$

Preuve Soit $\theta = \mathrm{Arccos}\,x$. (c'est-à-dire $x=\cos\theta$ avec $\theta\in[0,\pi]$)
On a $C_n(x) = \cos(n\theta)$. Donc
$$C_{n+1}(x) + C_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos n\theta\cos\theta = 2x\,C_n(x).$$ ※

Corollaire $C_n(\cdot)$ est un polynôme de degré n, appelé $n^{\text{ème}}$ polynôme de Chebychev.

Définition Les points d'interpolation de Chebychev d'ordre n sont les points
$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $i\in\{0,\dots,n\}$, les racines du polynôme C_{n+1}

On a $C_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

$\cos((n+1)\theta)=0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi$
avec $k\in\{0,\dots,n-1\}$

SN4: séance 4

2018年1月13日 20:21

§4 Constante de Lebesgue associée aux points d'interpolation

Soient $x_0, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts dans $[a,b]$

On considère $P_n : C^0([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}[T]_n$ l'application linéaire qui envoie $f \in C^0([a,b])$ l'unique polynôme $P_n(f)$ dans $\mathbb{R}[T]_n$ tel que $P_n(f)(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Soit $l_i \in \mathbb{R}[T]_n$ défini comme $l_i(T) = \prod_{\substack{j \in \{0,\dots,n\} \\ j \neq i}} \frac{T - x_j}{x_i - x_j}$

Alors $P_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i$

<u>Proposition</u> La norme de l'application linéaire P_n, définie comme

$$\|P_n\| := \sup_{\substack{f \in C^0([a,b]) \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n(f)\|_{\sup}}{\|f\|_{\sup}},$$

est égale à $\left\| \sum_{i=0}^{n} |l_i| \right\|_{\sup}$

<u>Preuve</u> $$\|P_n(f)\|_{\sup} = \sup_{x \in [a,b]} \left| \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \right| \leqslant \|f\|_{\sup} \cdot \sup_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$$= \|f\|_{\sup} \cdot \left\| \sum_{i=0}^{n} |l_i| \right\|_{\sup}$$

Réciproquement, la continuité des l_i montre qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} |l_i| \right\|_{\sup} = \sum_{i=0}^{n} |l_i(\xi)|$$

Soit $g \in C^0([a,b])$ affine par morceaux, $\|g\|_{\sup} = 1$. $g(x_i) = \mathrm{sgn}(l_i(\xi))$

Alors $P_n(g)(\xi) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(\xi)|$. Donc $\|P_n\| \geqslant \left\| \sum_{i=0}^{n} |l_i| \right\|_{\sup}$ ※

<u>Def</u> On désigne par $\Lambda_n(x_0, \dots, x_n)$ la norme de P_n, appelée constante de Lebesgue associée à $x_0, \dots, x_n$

<u>Remarque</u> Λ_n mesure la qualité d'approximation : pour toute $f \in C^0([a,b])$, on a

$$\|f - P_n(f)\|_{\sup} \leqslant (1 + \Lambda_n) \, \mathrm{dist}(f, \mathbb{R}[T]_n)$$

Soit $q \in \mathbb{R}[T]_n$. on a $\|f - P_n(f)\|_{\sup} \leqslant \|f - q\|_{\sup} + \|P_n(f) - P_n(q)\|_{\sup}$