SN4: séance 5

2018年1月13日 20:21

<u>Proposition</u> Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. On a

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 0<n\leq x}} f(n) = f(x)[x] - \int_0^x f'(t)[t]\,dt$$

<u>Preuve</u>

$$\int_0^x f'(t)[t]\,dt = \sum_{0<n\leq x} \int_{n-1}^{n} f'(t)(n-1)\,dt + \left(\int_{[x]}^{x} f'(t)\,dt\right)[x]$$

$$= \sum_{0<n\leq x} (n-1)\big(f(n)-f(n-1)\big) + \big(f(x)-f([x])\big)[x]$$

$$= \sum_{0<n\leq x} \big(n f(n) - (n-1) f(n-1)\big) - \sum_{0<n\leq x} f(n) + f(x)\cdot[x] - f[x]\cdot[x]$$

$$= -\sum_{1<n\leq x} f(n) + f(x)\cdot[x] \qquad \#$$

<u>Corollaire</u>

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln(2i+1) \geq (n-1)\ln(2n-1) - n$$

<u>Preuve</u>

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln(2i+1) = \sum_{0<i\leq n-1} \ln(2i+1) = (n-1)\ln(2n-1) - \int_0^n \frac{2[t]}{2t+1}\,dt$$

$$\geq (n-1)\ln(2n-1) - n \qquad \#$$

Dans le cas d'interpolation avec points équidistant, on a

$$\|w\|_{sup} \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{i=0}^{n-1} (2i+1) \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{(2n-1)^{n-1}}{n^{n+1}} e^{-n}$$

$$\gtrsim \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{n^2} e^{-n}$$

Dans le cas d'interpolation avec points de chebychev, on a

$$\|w\|_{sup} = \frac{1}{2^n} = o\left(\left(\frac{1-(-1)}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{n^2} e^{-n} = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{2}{e}\right)^{-n}\right) \text{ quand } n\to\infty.$$

CHAPITRE 4 Intégration numériques

§1 Principe général

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue (et donc uniformément continue).

On cherche à calculer numériquement $\int_a^b f(t)\,dt$.

On choisit une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$

Le principe général consiste à remplacer $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$ par une moyenne

$$(x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{n_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$$

où $\xi_{ij} \in [x_i, x_{i+1}]$, $\sum_{j=0}^{n_i} \omega_{ij} = 1$

méthode de quadrature composée : approximer $\int_a^b f(t)\,dt$ par

$$\sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{n_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$$

Exemple ① $n_i = 0$ pour tout i

- méthode des rectangles à gauche

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

- méthode des rectangles à droite

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$$

- méthode du point milieu

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

② Interpolation linéaire : $n_i = 1$, $\xi_{i,0} = x_i$, $\xi_{i,1} = x_{i+1}$

On remplace f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par

$$f_i(t) = \frac{(t - x_i) f(x_{i+1}) + (x_{i+1} - t) f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\,dt = \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \cdot \left[\frac{1}{2}(t - x_i)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \left[\frac{1}{2}(x_{i+1} - t)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1})\right)$$

Méthode des trapèzes : $\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$

SN4: séance 5

2018年1月13日 20:21

③ Interpolation polynomial

On prend $n_i = n$ et on subdivise l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par

$$x_i = \xi_{i,0} < \xi_{i,1} < \cdots < \xi_{i,n} = x_{i+1}$$

On remplace f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i (de degré n)

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t)\,dt$$

Si on note $L_{i,j}(t) = \prod_{\substack{k \in \{0,\dots,n\} \\ k \neq j}} \frac{t - \xi_{i,k}}{\xi_{i,j} - \xi_{i,k}}$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{j=0}^{n} f(\xi_{i,j})\, L_{i,j}(t)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \quad \omega_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,j}(t)\,dt \Big/ (x_{i+1} - x_i)$$