SN4: séance 6

2018年1月13日 20:21

# CHAPITRE 4 Intégration numérique

## §2 Outils dans l'évaluation d'erreur

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f$ une fonction de classe $C^{N+1}$ sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \int_a^b \frac{1}{N!}(x-t)_+^N f^{(N+1)}(t)\,dt$$

Preuve On raisonne par récurrence sur $N$. Si $N=0$, la formule devient

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Passage de $N$ à $N-1$ (intégration par parties)

$$\frac{1}{N!}\int_a^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{N!}\Big[(x-t)^N f^{(N)}(t)\Big]_a^x + \frac{1}{N!}\int_a^x f^{(N)}(t)\, N(x-t)^{N-1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{N!}(x-a)^N f^{(N)}(a) + \frac{1}{(N-1)!}\int_a^x f^{(N)}(t)(x-t)^{N-1}\,dt$$

Théorème (Formule de la moyenne) Soit $w \geq 0$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Pour toute $f \in C([a,b])$ il existe $\xi \in ]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(t)w(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b w(t)\,dt$$

Preuve Soient $m = \inf f$, $M = \sup f$.

L'énoncé est trivial lorsque $\int_a^b w(t)\,dt = 0$ car dans ce cas-là on a

$$0 = m\int_a^b w(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)w(t)\,dt \leq M\int_a^b f(t)w(t)\,dt = 0.$$

Donc $\int_a^b f(t)w(t)\,dt = 0$ et on peut choisir n'importe quel $\xi \in ]a,b[$.

Si $\int_a^b w(t)\,dt \neq 0$, alors

$$m \leq \underbrace{\int_a^b f(t)w(t) \Big/ \int_a^b w(t)\,dt}_{=: q} \leq M.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, si $m < q < M$, alors $\exists \xi$, $f(\xi) = q$.

# SN4: séance 6

2018年1月13日 20:21

Si $q=m$ et $f(t)>m$ pour tout $t\in ]a,b[$, on a

$$\int_a^b (f(t)-m)\, w(t)\, dt > 0. \quad \text{contradictoire.}$$

Il existe donc $\xi \in ]a,b[$ tel que $f(\xi)=m$.

Le cas où $q=M$ est similaire $\#$

§3 Noyau de Peano

On se donne un poids $w>0$, intégrable sur $[a,b]$.

Soient $x_0, \dots, x_\ell$ des points dans $[a,b]$, $\lambda_0, \dots, \lambda_\ell$ des nombres réels

Pour toute $f\in C^0([a,b])$, soit

$$E(f) := \int_a^b f(t)\, w(t)\, dt - \sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i f(x_i)$$

Pour tout $\xi \in [a,b]$, soit $C_{N,\xi} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui envoie $t\in[a,b]$ sur $(t-\xi)_+^N$. Le noyau de Peano d'ordre $N$ est défini comme

$$K_N : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad K_N(\xi) := E(C_{N,\xi})$$

Théorème Pour toute fonction $f\in C^{N+1}([a,b])$, on a

$$E(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(t)\, f^{(N+1)}(t)\, dt \quad \text{pourvu que } E(P)=0 \text{ pour tout } P\in\mathbb{R}[T]_{\leq N}$$

Preuve D'abord $E(\cdot)$ est une forme linéaire sur $C^0([a,b])$.

Si $g: [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, qui est continue en première coordonnée, alors

$$E\left(x \longmapsto \int_{t\in[a,b]} g(x,t)\, dt\right) = \int_a^b E\big(x \longmapsto g(x,t)\big)\, dt$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$E(f) = E\left(x \longmapsto \int_a^b \frac{1}{N!}(x-t)_+^N f^{(N+1)}(t)\, dt\right)$$

$$= \int_a^b E\left(x \longmapsto \frac{1}{N!}(x-t)_+^N f^{(N+1)}(t)\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(t)\, E\big(x \longmapsto (x-t)_+^N\big)\, dt$$

$$= \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(t)\, f^{(N+1)}(t)\, dt \qquad \#$$

Corollaire Sous l'hypothèse du théorème, on a

$$E(f) \leq \frac{1}{N!} \|f^{(N+1)}\|_{sup} \cdot \int_a^b |K_N(t)|\, dt$$

Si de plus $K_N$ est de signe constant, alors il existe $\xi \in ]a,b[$ tel que

$$E(f) = \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(\xi) \int_a^b K_N(t)\, dt = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)\, E(x \mapsto x^{N+1})$$

Preuve Le premier énoncé résulte du théorème.

Si $K_N$ est de signe constant, alors l'existence de $\xi$ provient d'un théorème dans le paragraphe précédent. Il reste à montrer la dernière égalité

On prend $f(x) = x^{N+1}$, alors

$$E(f) = E(x \mapsto x^{N+1}) = (N+1) \int_a^b K_N(t)\, dt .$$

et donc $\int_a^b K_N(t)\, dt = \frac{1}{N+1} E(x \mapsto x^{N+1})$

§4 Exemples

- Méthode du point milieu

$$E(f) = \int_a^b f(t)\, dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

C'est une méthode d'ordre 1

$$K_1(t) = E(x \mapsto (x-t)_+) = \int_a^b (x-t)_+\, dx - \left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ (b-a)$$

$$= \int_t^b (x-t)\, dx - \left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ (b-a) = \frac{1}{2}(b-t)^2 - \left(\frac{a+b}{2} - t\right)_+ (b-a)$$

$K_1$ ne change pas de signe sur $[a,b]$ car

$$K_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b-t)^2 & \text{si } t > \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{2}\left(b^2 - 2bt + t^2 - (b^2 - a^2) + 2(b-a)t\right) = \frac{1}{2}(a-t)^2 & \text{si } t \leq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Donc $$\int_a^b K_1(t)\, dt = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{2}(b-t)^2\, dt = \left[\frac{1}{3}(t-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^b = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

- Méthode des trapèzes

$$E(f) = \int_a^b f(x)\, dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$K_1(t) = \int_a^b (x-t)_+\, dx - \frac{b-a}{2}\left((a-t)_+ + (b-t)_+\right) = \frac{1}{2}(b-t)^2 - \frac{(b-a)}{2}(b-t)$$

$$= \frac{1}{2}(b-t)(a-t) \leq 0 \text{ sur } [a,b]$$

# SN4: séance 6

2018年1月13日 20:21

On a $\int_a^b (b-t)(a-t)\,dt = \int_a^b (t-a)^2 - (b-a)(t-a)\,dt$

$$= \left[\frac{1}{3}(t-a)^3 - (b-a)\cdot\frac{1}{2}(t-a)^2\right]_a^b = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

· Méthode de Simpson

$$E(f) = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\left(\frac{1}{6}f(b) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(a)\right)$$

$$K_3(t) = E\left(x \mapsto (x-t)_+^3\right)$$

$$= \int_a^b (x-t)_+^3\,dx - (b-a)\left(\frac{1}{6}(b-t)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3\right)$$

$$= \int_t^b (x-t)^3\,dx - (b-a)\left(\frac{1}{6}(b-t)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3\right)$$

$$= \frac{1}{4}(b-t)^4 - (b-a)\frac{1}{6}(b-t)^3 + (b-a)\frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3$$

Si $t > \frac{a+b}{2}$, $K_3(t) = \frac{1}{12}(b-t)^3\left(3b-3t-2(b-a)\right) = \frac{1}{12}(b-t)^3\underbrace{\left((b-t)+2(a-t)\right)}_{\leq 0}$

Si $t \leq \frac{a+b}{2}$, on a

$$K_3(t) = K_3(a+b-t) \leq 0$$

En effet $\int_a^b (x-t)_+^3\,dx = \int_a^b (a+b-x-t)_+^3\,dx = \int_a^b (x-(a+b-t))_+^3\,dx$

$$+ \int_a^b (a+b-t-x)^3\,dx$$

$$\left(y_+^3 - (-y)_+^3 = y^3\right)$$

$$\frac{1}{6}(b-t)_+^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)_+^3 = \frac{3}{2}\left(-\frac{a+b}{2}+t\right)_+^3 - \frac{1}{6}(t-a)_+^3$$

$$+ \frac{1}{6}(b-t)^3 + \frac{1}{6}(a-t)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)^3$$

$$\int_a^b K_3(t)\,dt = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{4}(b-t)^4 - \frac{1}{6}(b-a)(b-t)^3\,dt$$

$$= 2\left(\left[-\frac{1}{20}(b-t)^5\right]_{\frac{a+b}{2}}^b + \frac{1}{24}(b-a)\left[(b-t)^4\right]_{\frac{a+b}{2}}^b\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{20}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 - \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\right) = -\frac{1}{15}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$