Université Paris Diderot
L2 Simulation numérique

Devoir du 22 février 2018

Attention : La difficulté des questions n'est pas nécessairement croissante par rapport à leurs numéros. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, 21\}$ tel que $i < j$, la question numéro i, même non-justifiée, peut être servie comme un argument pour répondre à la question numéro j.

Le but de ce devoir est d'étudier l'interpolation d'une fonction par des fonctions polynomiales par morceaux. Dans tout le devoir, on fixe deux nombres réels a et b tels que $a < b$. On choisit une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

de l'intervalle $[a, b]$, où N est un entier, $N \geqslant 1$. On désigne par ε la longueur maximale des intervalles dans la subdivision, définie par

$$\varepsilon := \max_{i \in \{0,\ldots,N-1\}} (x_{i+1} - x_i)$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{R}[T]_{\leqslant d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant d$. Pour tout entier $d \geqslant 1$, soit V_d l'ensemble des fonctions S de classe C^{d-1} sur $[a, b]$ telles que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe un polynôme $P_i \in \mathbb{R}[T]_{\leqslant d}$ satisfaisant la condition suivante

$$\forall\, t \in [x_i, x_{i+1}], \quad P_i(t) = S(t).$$

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on définit

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Première partie : interpolation linéaire par morceaux

1. Montrer que, pour tout entier $d \geqslant 1$, l'ensemble de fonctions V_d est un sous-espace vectoriel de $C^0([a, b])$, qui est de dimension finie.
Réponse. Par définition, V_d est un sous-ensemble de $C^0([a, b])$. Soient R et S deux fonctions dans V_d. Pour tout entier $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe des polynômes P_i et Q_i dans $\mathbb{R}[T]_{\leqslant d}$ tels que $P_i(t) = R(t)$ et $Q_i(t) = S(t)$ pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$. On obtient donc $(P_i + Q_i)(t) = R(t) + S(t)$ et $(\alpha P_i)(t) = \alpha R(t)$ pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$. Comme $P_i + Q_i$ et αP_i appartiennent à $\mathbb{R}[T]_{\leqslant d}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, on obtient que $R + S$ et αR appartiennent à V_d. La dimension de V_d n'excède pas celle de $\mathbb{R}[T]^N_{\leqslant d}$.

2. Montrer que l'application $\Phi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^{N+1}$ définie par

$$\forall\, S \in V_1, \quad \Phi_1(S) := (S(x_0), \ldots, S(x_N))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Réponse. Montrons que Φ_1 est injective. Soit S une fonction dans V_1 telle que $S(x_0) = \cdots = S(x_N) = 0$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, le seul polynôme de degré $\leqslant 1$ qui s'annule en x_i et x_{i+1} est le polynôme nul. On obtient donc que S s'annuel sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ est arbitraire, la fonction S est nulle.

Pour tout $y = (y_0, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, soit $S_y : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction qui prend valeur

$$y_i + \frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i}(y_{i+1} - y_i)$$

en $t \in [x_i, x_{i+1}]$, où $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Alors S_y est une fonction continue, linéaire sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. En outre, par définition, on a $S(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$.

3. On désigne par $\pi_1 : C^2([a, b]) \to V_1$ l'application qui envoie toute fonction f de classe C^2 sur l'unique fonction $\pi_1(f) \in V_1$ telle que $\pi_1(f)(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\|f - \pi_1(f)\|_{\sup} \leqslant \|f''\|_{\sup} \cdot \frac{1}{8}\varepsilon^2.$$

Indication : On peut utiliser le fait que la restriction de $\pi_1(f)$ à $[x_i, x_{i+1}]$ s'identifie la fonction d'interpolation de Lagrange d'ordre 1 de f avec l'ensemble de points d'interpolation $\{x_i, x_{i+1}\}$.
Réponse. Soit $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. D'après le théorème du cours, si on note $w_i : [x_i, x_{i+1}] \to +\infty$ la fonction définie par $w_i(t) = (t - x_i)(t - x_{i+1})$ on a

$$\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f(t) - \pi_1(f)(t)| \leqslant \frac{1}{2!}\Big(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |w_i(t)|\Big)\Big(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f''(t)\Big).$$

Pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$, on a

$$|w_i(t)| = (t - x_i)(x_{i+1} - t) \leqslant \Big(\frac{(t - x_i) + (x_{i+1} - t)}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2.$$

On en déduit que

$$\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |f(t) - \pi_1(f)(t)| \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon^2 \|f''\|_{\sup}.$$

Deuxième partie : spline d'ordre 3

Dans les questions **4–6**, on fixe une fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$ et on suppose l'existence d'une fonction g dans V_3 telle que $g(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$ et que $g'(a) = f(a)$, $g'(b) = f'(b)$.

4. En utilisant l'intégration par partie, montrer que, pour tout indice i dans $\{0,\dots,N-1\}$, on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t)-g''(t))g''(t)\,\mathrm{d}t = (f'(x_{i+1})-g'(x_{i+1}))g''(x_{i+1})-(f'(x_i)-g'(x_i))g''(x_i).$$

Réponse. On a

$$\begin{aligned}&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t)-g''(t))g''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[(f'(t)-g'(t))g''(t)\Big]_{t=x_i}^{t=x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t)-g'(t))g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En outre, comme la restriction de g à $[x_i, x_{i+1}]$ s'identifie à un polynôme de degré $\leqslant 3$, il existe une constante C tel que $g^{(3)}(t) = C$ sur $]x_i, x_{i+1}[$, on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t)-g'(t))g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t = C\Big[f(t)-g(t)\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$$

car $f(x_i) = g(x_i)$ et $f(x_{i+1}) = g(x_{i+1})$.

5. En déduire que

$$\int_a^b (f''(t)-g''(t))g''(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Réponse. En prenant la somme des égalités énoncée dans la question précédente, on obtient

$$\int_a^b (f''(t)-g''(t))g''(t)\,\mathrm{d}t = (f'(b)-g'(b))g''(b) - (f'(a)-g'(a))g''(a) = 0.$$

6. Montrer que

$$\int_a^b |f''(t)-g''(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_a^b f''(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b g''(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Réponse. On a

$$\begin{aligned}&\int_a^b |f''(t)-g''(t)|^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b f''(t)^2\,\mathrm{d}t + \int_a^b g''(t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= -2\int_a^b (f''(t)-g''(t))g''(t)\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

7. Montrer que l'application $\Phi_3 : V_3 \to \mathbb{R}^{N+3}$ qui envoie tout $S \in V_3$ sur $(S'(a), S(x_0), S(x_1), \dots, S(x_{N-1}), S(x_N), S'(b))$ est une application linéaire injective.

Réponse. Il est claire que l'application en question est linéaire. Soit S une fonction dans V_3 telle que $\Phi_3(S) = (0,\dots,0)$. On applique la question précédente à la situation où $g = S$ et f est la fonction nulle, on obtient que

$\int_a^b S''(t)^2 = 0$ et donc S'' est identiquement nulle. Comme $S(a) = S'(a) = 0$, on obtient que S est la fonction nulle.

8. Montrer que les fonctions $S_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, définies par

$$S_i(t) = \max((t - x_i)^3, 0), \qquad \text{où } i \in \{1, \ldots, N - 1\},$$

appartiennent à V_3.

Réponse. La fonction S_i s'identifie au polynôme $(T - x_i)^3$ sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ quand $j \in \{1, \ldots, N - 1\}$. En outre, elle s'annule sur $[x_j, x_{j+1}]$ si $j \in \{0, \ldots, i - 1\}$. En outre, la fonction S_i est de classe C^2. En effet, on a $S_i'(t) = 3(t - x_i)^2 \mathbb{1}_{[x_i,+\infty[}(t)$ et $S_i''(t) = 6(t - x_i)\mathbb{1}_{[x_i,+\infty[}(t)$.

9. Montrer que l'application Φ_3 définie dans la question **7** est bijective. *Indication : on peut montrer que les fonctions* $1, T, T^2, T^3, S_1, \ldots, S_{N-1}$ *forment une famille libre dans* V_3.

Réponse. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N+3}$ tel que

$$0 = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + \mu_1 S_1(t) + \cdots + \mu_{N-1} S_{N-1}(t).$$

Comme $S_i = 0$ sur $[x_0, x_1]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N - 1\}$, on obtient que $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 = 0$ sur $[x_0, x_1]$. Par conséquent, on a $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On montre par récurrence que les coefficients $\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$ sont nuls. D'abord les fonctions $S_1, \ldots, S_{N-2}$ s'annulent sur $[x_{N-1}, x_N]$, tandis que $S_{N-1}(x_N) = (x_N - x_{N-1})^3 > 0$. Donc $\mu_{N-1} = 0$. On suppose que $\mu_{i+1} = \cdots = \mu_{N-1} = 0$, où $i \in \{1, \ldots, N - 2\}$. Comme les fonctions $S_1, \ldots, S_{i-1}$ s'annulent sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $S_{i+1}(x_{i+1}) = (x_{i+1} - x_i)^3 > 0$, on obtient que $\mu_i = 0$. La famille de fonctions $1, T, T^2, T^3, S_1, \ldots, S_{N-1}$ est donc libre. Ainsi la dimension de V_3 est au moins $N + 3$. D'après la question **7** et le théorème du rang, on obtient que V_3 est de dimension $N + 3$ sur $\mathbb{R}$ et l'application linéaire Φ_3 est une bijection.

10. Montrer que, pour toute fonction $f \in C^2([a, b])$, il existe un unique fonction $S_f \in V_3$ telle que $f'(a) = S_f'(a)$, $f'(b) = S_f'(b)$ et que $f(x_i) = S_f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$.

Réponse. Il suffit de prendre S_f comme l'image réciproque de

$$(f'(a), f(x_0), \ldots, f(x_N), f'(b))$$

par Φ_3.

11. Soit $\mathscr{C}_f$ le sous-ensemble de $C^2([a, b])$ des fonctions h telles que $h'(a) = f'(a)$, $h'(b) = f'(b)$ et que $h(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$. Montrer que S_f est l'unique élément dans $C^2([a, b])$ qui minimise la fonction

$$(h \in \mathscr{C}_f) \longmapsto \int_a^b h''(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Réponse. L'égalité dans la question **6** reste vraie si on remplace f par n'import quelle fonction $h \in \mathscr{C}_f$, d'où

$$\int_a^b h''(t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_a^b S_f''(t)^2 \, \mathrm{d}t + \int_a^b |h''(t) - S_f''(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

d'où

$$\int_a^b h''(t) \, \mathrm{d}t \geqslant \int_a^b S_f''(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

L'égalité est satisfaite si et seulement si $h'' = S_f''$. Comme $h'(a) = S_f'(a) = f'(a)$ et $h(a) = S_f(a) = f(a)$, on obtient $h = S_f$.

Troisième partie : estimation d'erreur

Dans cette partie, on fixe une fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$. Soit S_f l'unique élément de V_3 tel que $S_f'(a) = f'(a)$, $S_f'(b) = f'(b)$ et que $S_f(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$. On désigne par $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme sur $C^0([a, b])$ définie par

$$\|h\|_{L^2} := \left(\int_a^b h(t)^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

Rappelons que cette norme est induite par le produit scalaire $\langle \, , \, \rangle_{L^2}$ défini par

$$\forall \, (g, h) \in C^0([a, b])^2, \quad \langle g, h \rangle_{L^2} := \int_a^b g(t)h(t) \, \mathrm{d}t.$$

12. Soit $\delta = f - S_f$. Montrer que

$$\int_a^b \delta''(t)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f''(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Réponse. C'est une conséquence immédiate de la question **6**.

13. Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, la fonction δ' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. En déduire que

$$\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |\delta'(t)| \leqslant (x_{i+1} - x_i)^{1/2} \|f''\|_{L^2}.$$

Réponse. Le premier énoncé provient du théorème de Rolle et du fait que $\delta(x_i) = \delta(x_{i+1}) = 0$. Soit $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $\delta'(\xi_i) = 0$. Pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\delta'(t)|^2 = |\delta'(t) - \delta'(\xi_i)|^2 = \left| \int_{\xi_i}^t \delta''(s) \, \mathrm{d}s \right|^2 \leqslant |t - \xi_i| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta''(s)^2 \, \mathrm{d}s,$$

d'où

$$|\delta'(t)| \leqslant (x_{i+1} - x_i)^{1/2} \|\delta''\|_{L^2} \leqslant (x_{i+1} - x_i)^{1/2} \|f''\|_{L^2},$$

où la deuxième inégalité provient de la question précédente.

14. Montrer que
$$\|\delta\|_{\sup} \leqslant \frac{\varepsilon^{3/2}}{2}\|f''\|_{L^2}$$
Réponse. Soit $t \in [a,b]$. Il existe $i \in \{0,\ldots,N\}$ tel que $|t - x_i| \leqslant \varepsilon/2$. Comme $\delta(x_i) = 0$, par le théorème des accroissements finis, on a
$$|\delta(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\delta'\|_{\sup} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varepsilon\|f''\|_{L^2}.$$

Quatrième partie : phénomène de Runge

Dans cette partie, on compare la méthode de spline d'ordre 3 et la méthode d'interpolation de Lagrange avec points d'interpolation équidistants pour la fonction de Runge $R : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$R(t) = \frac{1}{1+25t^2}.$$
On suppose que N est un nombre pair, qui est de la forme $2n$, où $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. On suppose aussi que
$$x_i = \frac{i}{n} - 1, \quad i \in \{0,\ldots,2n\}.$$
Soit P_n l'unique polynôme de degré $\leqslant N$ tel que $P_n(x_i) = R(x_i)$ pour tout $i \in \{0,\ldots,N\}$. Soit en outre $w_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{2n}(t - x_i).$$

15. Montrer que $P_n(T)(1+25T^2) - 1$ est divisible par le polynôme $w_n(T)$.
Réponse. Pour tout $i \in \{0,\ldots,2n\}$, on a
$$P_n(x_i)(1+25x_i^2) - 1 = \frac{P_n(x_i)}{R(x_i)} - 1 = 0.$$

16. Soit $Q_n \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme tel que
$$P_n(T)(1+25T^2) - 1 = Q_n(T)w_n(T).$$
Montrer qu'il existe une constante C_n telle que $Q_n(T) = C_nT$. En évaluant la valeur des polynômes en un $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^2 = -1/5$, déterminer la valeur de C_n.
Réponse. Comme le polynôme P_n est de degré $\leqslant 2n$ et w est de degré $2n+1$, on obtient que Q_n est de degré $\leqslant 1$. En outre, comme les points d'interpolation sont symétriquement distribués par rapport à 0, on obtient que P_n est un polynôme pair tandis que w est un polynôme impair. Donc Q_n est un polynôme impair. Il est alors de la forme $Q_n(T) = C_nT$ pour certaine constante C_n.

On a

$$P_n(\xi)(1+25\xi^2)-1 = -1 = Q_n(\xi)w_n(\xi)$$
$$= C_n\xi \prod_{k=-n}^{n}(\xi - k/n) = C_n\xi^2\prod_{k=1}^{n}(\xi^2 - k^2/n^2).$$

Donc

$$C_n = (-1)^n 5\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}+\frac{k^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

17. Montrer qu'il existe un nombre $\theta \in \,]0,1[$ tel que la suite $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ ne converge pas vers $R(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant $1-\theta < |t| < 1$.

Réponse. D'après la question précédente, on a

$$P_n(t) - R(t) = \frac{C_n t w_n(t)}{1+25t^2} = \frac{(-1)^n 5t^2\prod_{k=1}^{n}(t^2 - k^2/n^2)}{(1+25t^2)\prod_{k=1}^{n}(1/5 + k^2/n^2)}.$$

Donc la suite $(P_n(t))_{n\geqslant 1}$ converge vers $R(t)$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln|t^2 - k^2/n^2| - \sum_{k=1}^{n}\ln(1/5 + k^2/n^2)\right) = -\infty.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln|t^2 - k^2/n^2| = \int_0^1 \ln|t^2 - s^2|\,\mathrm{d}s$$
$$= (1+t)\ln(1+t) + (1-t)\ln(1-t) - 2,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1/5 + k^2/n^2) = \int_0^1 \ln(1/5 + s^2)\,\mathrm{d}s$$
$$= \ln\left(\frac{6}{5}\right) - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+5s^2}\,\mathrm{d}s = \ln\left(\frac{6}{5}\right) - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(\sqrt{5}).$$

18. Comparer la méthode d'interpolation de Lagrange et la méthode de spline d'ordre 3 pour la fonction de Runge.

Cinquième partie : calcul numérique

Le but de cette partie est d'étudier un algorithme qui calcule numériquement l'inverse de l'application Φ_3 définie dans la question **7.**

19. Soit S un élément de V_3. Montrer que S'' est un élément de V_1.

Réponse. Par définition, S'' est une fonction continue. De plus, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ ($i \in \{0,\dots,N-1\}$), S'' est un polynôme de degré $\leqslant 1$. Donc $S'' \in V_1$.

20. Soient L une fonction dans V_1 et (p_0, p_1) un élément de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique fonction $S \in V_3$ telle que $S'' = L$ et que $(S(a), S(b)) = (p_0, p_1)$.

Réponse. L'application linéaire $V_3 \to V_1 \times \mathbb{R}^2$ qui envoie $f \in V_3$ sur $(f'', f(a), f(b))$ est injectif. En effet, si $f'' = 0$, alors f est un polynôme de degré $\leqslant 1$. Donc la condition $f(a) = f(b) = 0$ montre que f est identiquement nulle. D'après le théorème du rang, on obtient que cette application linéaire est une bijection.

21. Soient S un élément de V_3 et $L = S''$. Montrer que, pour tout indice i dans $\{0, \ldots, N-1\}$, la restriction de S à $[x_i, x_{i+1}]$ s'écrit sous la forme : pour tout $i \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$S(t) = \frac{L(x_{i+1})}{6(x_{i+1} - x_i)}(t - x_i)^3 + \frac{L(x_i)}{6(x_i - x_{i+1})}(t - x_{i+1})^3 + A_i(t - x_i) + B_i(x_{i+1} - t),$$

où A_i et B_i sont deux constantes. Exprimer les constantes A_i et B_i en fonctions de $S(x_i)$, $S(x_{i+1})$, $L(x_i)$ et $L(x_{i+1})$.

Réponse. On a

$$L(t) = \frac{L(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}(t - x_i) + \frac{L(x_i)}{x_i - x_{i+1}}(t - x_{i+1})$$

pour tout $t \in [x_i, x_{i+1}]$. Par intégration on obtient le premier énoncé. En outre, on a

$$\begin{cases} A_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{6}L(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)^2 = S(x_{i+1}), \\ B_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{6}L(x_i)(x_i - x_{i+1})^2 = S(x_i), \end{cases}$$

d'où

$$A_i = \frac{S(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}L(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i), \quad B_i = \frac{S(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}L(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

22. On garde les notations et hypothèses de la question précédente. Montrer que

$$S'(a) = \frac{S(x_1) - S(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{L(x_0)}{2}(x_1 - x_0) - \frac{1}{6}(L(x_1) - L(x_0))(x_1 - x_0),$$

$$S'(b) = \frac{S(x_N) - S(x_{N-1})}{x_N - x_{N-1}} - \frac{L(x_N)}{2}(x_N - x_{N-1}) - \frac{1}{6}(L(x_N) - L(x_{N-1}))(x_N - x_{N-1}),$$

et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}L(x_i)(x_i - x_{i+1}) + \frac{S(x_{i+1}) - S(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{1}{6}(L(x_{i+1}) - L(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2}L(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{S(x_i) - S(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{6}(L(x_i) - L(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Réponse. On calcul S' en utilisant la formule dans la question précédentes. Les équations dans l'énoncé proviennent des valeurs de S' en x_0, x_N, et la continuité de S' en $x_1, \ldots, x_{N-1}$.

Fin de l'épreuve