

CHAPITRE 6 Équations différentielles ordinaires

§1 Généralités

On considère un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et une fonction continue

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) \mapsto f(t, x)$$

On considère l'équation différentielle

$$x' = f(t, x) \quad (*)$$

Def Soit I un intervalle dans \mathbb{R} . On appelle **solution** de (*) sur I toute fonction différentiable $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que

$$(1) \forall t \in I, (t, x(t)) \in U$$

$$(2) \forall t \in I, x'(t) = f(t, x(t))$$

Soient J un intervalle dans \mathbb{R} qui contient I , et $y: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ une solution de (*) sur J tel que $y|_I = x$, on dit que y est un **prolongement** de x

Si x n'a pas de prolongement sur un intervalle qui contient strictement I , on dit que x est une solution maximale.

Fait Toute solution de (*) se prolonge en une solution maximale

Problème de Cauchy: Étant donné $(t_0, x_0) \in U$, chercher une solution x de l'équation (*) sur un voisinage de t_0 telle que $x(t_0) = x_0$.

Lemme Soient $(t_0, x_0) \in U$ et I un intervalle tel que $t_0 \in I^\circ$. Alors $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une solution au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ si et seulement si x est continue, $\Gamma_x \subset U$, et, pour tout $t \in I$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz) On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que (t, x) et (t, y) appartiennent à U . Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation (*) admette une **unique** solution x sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $x(t_0) = x_0$.

Remarque : On considère la norme sup sur \mathbb{R}^d et \mathbb{R}^{d+1}

$$\|(x_1, \dots, x_d)\| = \max_i |x_i|$$

Preuve Soit $R \geq 0$ tel que

$$\overline{B((t_0, x_0); R)} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|(t-t_0, x-x_0)\| \leq R\} \subset U$$

Soit

$$M = \sup_{|t-t_0| < R} \|f(t, x_0)\| + \lambda R$$

Soit $\varepsilon < R$ tel que $\varepsilon M < R$.

Soient $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et $\mathcal{A} = \left\{ \gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \gamma(t_0) = x_0, \sup_{t \in J} \|\gamma(t) - x_0\| \leq R \right\}$

On munit \mathcal{A} de la métrique d définie par

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in J} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$$

C'est un espace métrique complet. Soit $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que

$$T(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \quad t \in J$$

Alors $\|T(\gamma)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \right\|$

$$\leq \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) - f(s, x_0) ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon \sup_{s \in J} \|f(s, x_0)\| + \varepsilon \lambda R \leq \varepsilon M < R$$

Donc $T(\gamma) \in \mathcal{A}$. En outre, pour tout $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{A}^2$, on a

$$d(T(\gamma_1), T(\gamma_2)) = \sup_{t \in J} \|T(\gamma_1)(t) - T(\gamma_2)(t)\|$$

$$= \sup_{t \in J} \left\| \int_{t_0}^t f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s)) ds \right\| \leq \lambda |t-t_0| d(\gamma_1, \gamma_2)$$

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a

$$d(T^m(\gamma_1), T^m(\gamma_2)) \leq \frac{\lambda^m}{m!} |t-t_0|^m d(\gamma_1, \gamma_2)$$

Donc T^m est une contractante lorsque m est assez grand. On en déduit que T possède un unique point fixe, qui est l'unique solution au problème de Cauchy. *

Remarque L'unicité de la solution locale implique l'unicité globale (sans l'hypothèse du théorème): Si γ_1 et γ_2 sont deux solutions de (*) sur le même intervalle I tel que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ pour certain $t_0 \in I$, alors on a $\gamma_1 = \gamma_2$. Ainsi pour toute solution x de (*) il existe un unique prolongement qui est une solution maximale.

Transformation d'une équation d'ordre supérieure en une équation d'ordre 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$ et $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \quad (**)$$

Quitte à introduire plus de variables, on peut transformer (**) en une équation d'ordre 1. Soient $x_0 = y$, $x_1 = y'$, \dots , $x_{n-1} = y^{(n-1)}$, alors l'équation (**) devient

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = F(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Soit $f: U \rightarrow (\mathbb{R}^d)^n$ tel que

$$f(t, x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t, x_0, \dots, x_{n-1}))$$

Alors l'équation (**) devient

$$x' = f(t, x)$$

avec $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$

§2 Méthode numérique à un pas

On considère l'équation

$$x' = f(t, x) \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ continue}$$

et on cherche à résoudre numériquement cette équation sur un intervalle $[a, b]$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On fixe une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

On suppose que f est lipschitzienne par rapport à x et uniformément par rapport à t . Autrement dit, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2 \text{ tel que } \{(t, x), (t, y)\} \subset U, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $(t_0, x_0) \in U$. On suppose que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ admet une solution sur } [a, b].$$

Déf On appelle **méthode à un pas** toute méthode qui permet de calculer numériquement $x(t_{n+1})$ à partir de la seule valeur antérieure $x(t_n)$.
Plus généralement, une **méthode à r pas** est une méthode qui utilise $x(t_n), \dots, x(t_{n-r+1})$ pour calculer $x(t_{n+1})$.

On produit ainsi une suite $(x_n)_{n=0}^N$ telle que

$$x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n) \text{ avec } h_n = t_{n+1} - t_n$$

L'erreur de **consistance** de la méthode est définie comme

$$E_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - x_{n+1}$$

où γ_{x_n} est la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma_{x_n}' = f(t, \gamma_{x_n}) \\ \gamma_{x_n}(t_n) = x_n \end{cases}$$

Par définition, on a

$$E_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \Phi(t_n, x_n, h_n)$$

Exemple - Méthode d'Euler

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x), \text{ c'est-à-dire } x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n)$$

$$E_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \gamma_{x_n}'(t_n)$$

$$= \gamma_{x_n}(t_n + h_n) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \gamma_{x_n}'(t_n) = \frac{1}{2} h_n^2 \gamma_{x_n}''(t_n) + o(h_n^2),$$

pourvu que γ_{x_n} soit de classe C^2 .

- Méthode de Taylor d'ordre p . On suppose f de classe C^p

$$\gamma_{x_n}(t_n + h_n) - \gamma_{x_n}(t_n) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, x_n) + o(h_n^p)$$

$$\text{où } f^{[1]}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad f^{[m]} = (f^{[m-1]})^{[1]}$$

$$\text{On prend } \Phi(t, x, h) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} h^k f^{[k-1]}(t, x).$$