§3 Méthode de Runge-Kutta

Rappel du problème : résoudre numériquement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad f : U \to \mathbb{R}^d \text{ continue}, \quad U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \text{ ouvert}$$

sur l'intervalle $[a,b]$ avec $a = t_0$.

On introduit une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \qquad h_n := t_{n+1} - t_n$$

Méthode à un pas :

$$x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n)$$

Méthode de Runge-Kutta : $i \in \{1, \dots, q\}$

Pour tout n, soit $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$, $c_i \in [0,1]$

Si z est une solution de l'équation $z' = f(t,z)$,

alors $z(t_{n,i}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(s, z(s))\,ds$

$$= z(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n))\,du$$

$s = t_n + u h_n$

De même $z(t_{n+1}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n))\,du$

On se donne, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ des $(a_{ij})_{1\le j<i}$ et $(b_j)_{1\le j\le q}$ tels que

$$\int_0^{c_i} \varphi(u)\,du \approx \sum_{1\le j<i} a_{ij}\,\varphi(c_j)$$

$$\int_0^1 \varphi(u)\,du \approx \sum_{1\le j\le q} b_j\,\varphi(c_j).$$

Par récurrence, on pose

$$x_{n,i} = x_n + h_n \sum_{1\le j<i} a_{ij} p_{n,j}$$

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n + \sum_{j=1}^{q} b_j p_{n,j}$$

SN4: séance 9

2018年1月13日 20:21

Remarque ① La méthode de Runge-Kutta est une méthode à un pas :

On a $\Phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, y_j)$ où $c_i = \sum_{1 \leq j < i} a_{ij}$

$y_i = y + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), \quad 1 \leq i \leq q$ $\quad 1 = \sum_{j=1}^{q} b_j$

② Méthode d'Euler est un cas particulier de la méthode de Runge-Kutta avec $q = 1$ $c_1 = 1$, $b_1 = 1$

Définition Soit Φ une méthode à un pas. On dit que la méthode Φ est d'ordre $\geq p$ si, pour toute fonction z sur $[a, b]$ solution de l'équation $z' = f(t, z)$, il existe une constante $C(z)$ telle que

$$|\varepsilon_n(z)| \leq C(z) h_n^{p+1} \quad \forall n \in \{0, \cdots, N-1\}.$$

où $\varepsilon_n(z) = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \Phi(t_n, z(t_n), h_n)$ est l'erreur de consistance à l'étape n.

Théorème La méthode de Runge-Kutta est d'ordre ≥ 1

Preuve

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(z) &= z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_n + c_j h_n, y_j) \\
&= h_n \int_0^1 z'(t_n + h_n s)\, ds - h_n \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_n + c_j h_n, y_j) \\
&= h_n \left(\int_0^1 f(t_n + h_n s, z(t_n + h_n s))\, ds - \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_n + c_j h_n, y_j) \right) \\
&\leq 2 \|f\|_{sup} \cdot h_n
\end{aligned}$$

Théorème La méthode de Runge-Kutta est d'ordre ≥ 2 si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} b_j c_j = \frac{1}{2}$

SN4: séance 9

2018年1月13日 20:21

Théorème Soit Φ une méthode à un pas. On suppose que f et Φ sont de classe C^p. Alors la méthode Φ est d'ordre $\geq p$ si et seulement si

$$\frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t,y,0) = \frac{1}{l+1} f^{[l]}(t,y) \qquad \forall\, l \in \{0, \dots p-1\}$$

où $f^{[1]}(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$ et $f^{[k]} = \left(f^{[1]}\right)^{[k-1]}$

Preuve Soit z une solution à l'équation $z' = f(t,z)$. On a

$$\varepsilon_n(z) = z(t_{n+1}) - y_n - h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \qquad \text{avec } y_n = z(t_n)$$

La formule de Taylor donne

$$\Phi(t_n, y_n, h_n) = \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t_n, y_n, 0)\, h_n^l + o(h_n^p)$$

Si f est de classe C^p, alors z est de classe C^{p+1}, donc

$$z(t_{n+1}) - y_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k!} h_n^k z^{(k)}(t_n) + o(h_n^{p+1})$$

$$= \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{(l+1)!} h_n^{l+1} f^{[l]}(t_n, y_n) + o(h_n^{p+1})$$

Donc

$$\varepsilon_n(z) = \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{l!} h_n^{l+1} \left(\frac{1}{l+1} f^{[l]}(t_n, y_n) - \frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t_n, y_n, 0) \right) + o(h_n^{p+1}) \qquad \#$$

Application à la méthode de Runge-Kutta :

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{i=1}^{q} b_i f(t + c_i h, y_i)$$

$$y_i = y + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), \quad 1 \leq i \leq q$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = \sum_{i=1}^{q} b_i \left(c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t + c_i h, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t + c_i h, y_i) \frac{\partial y_i}{\partial h} \right)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial h} = \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j) + h \sum_{1 \leq j < i} \frac{\partial}{\partial h}\left(a_{ij} f(t + c_j h, y_j) \right)$$

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t, y) \qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial h}\right|_{h=0} = \sum_{i=1}^{q} b_i c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_i) \frac{\partial y_i}{\partial h}$$

SN4: séance 9

2018年1月13日 20:21

CHAPITRE 6 Équations différentielles ordinaires

§1 Généralités

On considère un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et une fonction continue

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(t, x) \longmapsto f(t, x)$$

On considère l'équation différentielle

$$x' = f(t, x) \qquad (*)$$

Déf Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. On appelle solution de $(*)$ sur I toute fonction différentiable $x : I \to \mathbb{R}^d$ telle que

(1) $\forall\, t \in I$, $(t, x(t)) \in U$

(2) $\forall\, t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$

Soient J un intervalle dans $\mathbb{R}$ qui contient I, et $y : J \to \mathbb{R}^d$ une solution de $(*)$ sur J tel que $y|_I = x$, on dit que y est un prolongement de x

Si x n'a pas de prolongement sur un intervalle qui contient strictement I, on dit que x est une solution maximale.

Fait Toute solution de $(*)$ se prolonge en une solution maximale

Problème de Cauchy : Étant donné $(t_0, x_0) \in U$, chercher une solution x de l'équation $(*)$ sur un voisinage de t_0 telle que $x(t_0) = x_0$.

Lemme Soient $(t_0, x_0) \in U$ et I un intervalle tel que $t_0 \in \mathring{I}$. Alors $x : I \to \mathbb{R}^d$ est une solution au problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ si et seulement si x est continue, $\Gamma_x \subset U$, et, pour tout $t \in I$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz) On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant \lambda \| x - y \|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que (t, x) et (t, y) appartiennent à U. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation $(*)$ admette une unique solution x sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $x(t_0) = x_0$.

SN4: séance 8

2018年1月13日 20:21

<u>Remarque</u> : On considère la norme sup sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\|(x_1, \dots, x_d)\| = \max_i |x_i|$$

<u>Preuve</u> Soit $R \geq 0$ tel que

$$\overline{B((t_0, x_0); R)} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|(t - t_0, x - x_0)\| \leq R\} \subset U$$

Soit

$$M = \sup_{|t - t_0| < R} \|f(t, x_0)\| + \lambda R$$

Soit $\varepsilon < R$ tel que $\varepsilon M < R$.

Soient $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ et $\mathcal{A} = \{\gamma : J \to \mathbb{R}^d \mid \gamma(t_0) = x_0, \sup_{t \in J} \|\gamma(t) - x_0\| \leq R\}$

On munit $\mathcal{A}$ de la métrique d définie par

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in J} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$$

C'est un espace métrique complet. Soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ telle que

$$T(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \qquad t \in J$$

Alors $\|T(\gamma)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))\, ds \right\|$

$$\leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s)) - f(s, x_0)\, ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon \sup_{s \in J} \|f(s, x_0)\| + \varepsilon \lambda R \leq \varepsilon M < R$$

Donc $T(\gamma) \in \mathcal{A}$. En outre, pour tout $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{A}^2$, on a

$$d(T(\gamma_1), T(\gamma_2)) = \sup_{t \in J} \|T(\gamma_1)(t) - T(\gamma_2)(t)\|$$

$$= \sup_{t \in J} \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma_1(s)) - f(s, \gamma_2(s))\, ds \right\| \leq \lambda |t - t_0|\, d(\gamma_1, \gamma_2)$$

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a

$$d(T^m(\gamma_1), T^m(\gamma_2)) \leq \frac{\lambda^m}{m!} |t - t_0|^m d(\gamma_1, \gamma_2)$$

Donc T^m est une contractante lorsque m est assez grand. On en déduit que T possède un unique point fixe, qui est l'unique solution au problème de Cauchy ※

SN4: séance 8

2018年1月13日 20:21

<u>Remarque</u> L'unicité de la solution locale implique l'unicité globale (sous l'hypothèse du théorème) : si γ_1 et γ_2 sont deux solution de (*) sur le même intervalle I tel que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ pour certain $t_0 \in I$, alors on a $\gamma_1 = \gamma_2$. Ainsi pour toute solution x de (*) il existe un unique prolongement qui est une solution maximale

Transformation d'une équation d'ordre supérieure en une équation d'ordre 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^d$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \qquad (**)$$

Quitte à introduire plus de variables, on peut transformer (**) en une équation d'ordre 1. Soient $x_0 = y$, $x_1 = y'$, $\dots$, $x_{n-1} = y^{(n-1)}$, alors l'équation (**) devient

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = F(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Soit $f : U \to (\mathbb{R}^d)^n$ tel que

$$f(t, x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t, x_0, \dots, x_{n-1}))$$

Alors l'équation (**) devient

$$x' = f(t, x)$$

avec $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$

§2 Méthode numérique à un pas

On considère l'équation

$$x' = f(t, x) \qquad f : U \to \mathbb{R}^d \text{ continue}$$

et on cherche à résoudre numériquement cette équation sur un intervalle $[a, b]$. où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On fixe une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

On suppose que f est Lipschitzienne par rapport à x et uniformément par rapport à t. Autrement dit, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^2 \text{ tel que } \{(t, x), (t, y)\} \subset U, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $(t_0, x_0) \in U$. On suppose que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
admet une solution sur $[a,b]$.

Déf On appelle méthode à un pas toute méthode qui permet de calculer numériquement $x(t_{n+1})$ à partir de la seule valeur antérieure $x(t_n)$.
Plus généralement, une méthode à r pas est une méthode qui utilise $x(t_n), \dots, x(t_{n-r+1})$ pour calculer $x(t_{n+1})$.
On produit ainsi une suite $(x_n)_{n=0}^N$ telle que
$$x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n) \quad \text{avec} \quad h_n = t_{n+1} - t_n$$
L'erreure de consistance de la méthode est définie comme
$$\varepsilon_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - x_{n+1}$$
où γ_{x_n} est la solution au problème de Cauchy
$$\begin{cases} \gamma_{x_n}' = f(t, \gamma_{x_n}) \\ \gamma_{x_n}(t_n) = x_n \end{cases}$$

Par définition, on a
$$\varepsilon_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \Phi(t_n, x_n, h_n)$$

Exemple · Méthode d'Euler
$$\Phi(t,x,h) = f(t,x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n)$$
$$\varepsilon_n = \gamma_{x_n}(t_{n+1}) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \gamma_{x_n}'(t_n)$$
$$= \gamma_{x_n}(t_n + h_n) - \gamma_{x_n}(t_n) - h_n \gamma_{x_n}'(t_n) = \frac{1}{2} h_n^2 \gamma_{x_n}''(t_n) + o(h_n^2),$$
pourvu que γ_{x_n} soit de classe C^2.

- Méthode de Taylor d'ordre p. On suppose f de classe C^p
$$\gamma_{x_n}(t_n + h_n) - \gamma_{x_n}(t_n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}(t_n, x_n) + o(h_n^p)$$
où $f^{[1]}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad f^{[m]} = \left(f^{[m-1]}\right)^{[1]}$
On prend $\Phi(t,x,h) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} h^k f^{[k-1]}(t,x)$.