# CHAPITRE 1

# ENSEMBLES ET APPLICATIONS

## 1.1. Ensembles

**1.1.1.** — La formulation de la notion d'*ensemble* est initialement due à Georg Cantor (1895), qui énonça

> *Par ensemble, on étend toute collection $M$ d'objets de notre intuition ou de notre pensée, définis et* distincts*, que l'on appelle* élément *de $M$.*

**1.1.2.** — Si $M$ est un ensemble et si $x$ est un élément de $M$, on dit que $x$ *appartient à $M$*, noté $x \in M$. On barre le symbole $\in$ pour indiquer la négation de la relation $\in$. Donc «$y \notin M$» signifie «*$y$ n'appartient pas à $M$*».

**1.1.3.** — On convient que tout élément d'un ensemble est un ensemble, et tout ensemble n'appartient pas à lui-même.

**1.1.4.** — Soit $E$ un ensemble. On appelle *sous-ensemble* (ou *partie*) de $E$ tout ensemble $F$ tel que, tout élément de $F$ est un élément de $E$. Si $F$ est un sous-ensemble de $E$, on note $F \subset E$.

**1.1.5.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On désigne par $E \setminus F$ le sous-ensemble de $E$ constitué par les éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $F$, appelé la *différence* de $E$ par $F$. Si $F$ est un sous-ensemble de $E$, $E \setminus F$ est aussi appelé le *complémentaire* de $F$ dans $E$.

**1.1.6.** — On dit que deux ensembles $E_1$ et $E_2$ sont *égaux* et on note $E_1 = E_2$ si les relations $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$ sont simultanément satisfaites.

**1.1.7.** — Soient $E_1$ et $E_2$ deux ensembles. On appelle *l'intersection* de $E_1$ et $E_2$ l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à $E_1$ et $E_2$, notée $E_1 \cap E_2$. On dit que $E_1$ et $E_2$ sont *disjoints* si $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. On appelle *l'union* de $E_1$ et $E_2$ l'ensemble qui est constitué par les éléments appartenant à $E_1$ ou à $E_2$, noté $E_1 \cup E_2$. On appelle *produit cartésien* de $E_1$ et $E_2$ l'ensemble des couples $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, où $x$ appartient à $E_1$ et $y$ appartient à $E_2$.

**1.1.8.** — Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles paramétrée par un ensemble $I$. On désigne par $\bigcap_{i\in I} E_i$ l'ensemble constitué par les éléments appartenant à tous les ensembles $E_i$, et par $\bigcup_{i\in I} E_i$ l'ensemble constitué par les éléments appartenant à au moins l'un des ensembles $E_i$. Les ensembles $\bigcap_{i\in I} E_i$ et $\bigcup_{i\in I} E_i$ sont appelés *l'intersection* et *l'union* des ensembles $E_i$, $i \in I$, respectivement.

## 1.2. Applications

**1.2.1. Définition.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle *application* de $E$ dans $F$ tout sous-ensemble $f$ de $E \times F$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un et un unique élément $y$ de $F$ tel que $(x, y) \in f$. Les applications de $E$ dans $F$ forme un sous-ensemble de $E \times F$, noté $\mathrm{App}(E, F)$.

On utilise l'expression $f : E \to F$ pour désigne une application $f$ de $E$ dans $F$. Le sous-ensemble de $E \times F$ définissant cette application est souvent noté $\Gamma_f$ (au lieu de $f$) pour faciliter la lecture. Pour tout $x \in E$, on désigne par $f(x)$ l'unique élément de $F$ tel que $(x, f(x)) \in \Gamma_f$, appelé la *valeur* de l'application $f$ en $x$. Ainsi on peut considérer l'application $f$ comme une correspondance qui associe à chaque élément $x \in E$ un, et un seul, élément $f(x) \in F$.

**1.2.2. Proposition.** — *Soient $E$ et $F$ deux ensemble, et $f$ et $g$ deux applications de $E$ dans $F$. Alors $f$ et $g$ sont identiques (en d'autres termes, $\Gamma_f = \Gamma_g$) si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

*Démonstration.* — On suppose d'abord que $\Gamma_f = \Gamma_g$. Pour tout $x \in E$, on a $(x, f(x)) \in \Gamma_f = \Gamma_g$. Comme $g(x)$ est l'unique élément de $F$ tel que $(x, g(x)) \in \Gamma_g$, on obtient $f(x) = g(x)$.

Réciproquement, si la relation $f(x) = g(x)$ est satisfaite pour tout $x \in E$, on a

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in E\} = \{(x, g(x)) \,|\, x \in E\} = \Gamma_g.$$

□

**1.2.3. Exemples.** —

(1) Soient $E$ un ensemble et $A$ un sous-ensemble de $E$. On désigne par $i_A : A \to E$ l'application qui associe à chaque élément de $A$ le même objet vu comme élément de $E$ (c'est-à-dire que $i_A(x) = x$ pour tout $x \in A$). Cette application est appelée l'*application d'inclusion* de $A$ dans $E$. Dans le cas particulier où $A = E$, l'application d'inclusion de $E$ dans $E$ est appelé *l'application d'identité de $E$*, noté $\mathrm{Id}_E$. On a $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.

(2) Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On désigne par $\mathrm{pr}_1 : E \times F \to E$ et par $\mathrm{pr}_2 : E \times F \to F$ les applications qui associent à $(x, y) \in E \times F$ les éléments $x \in E$ et $y \in F$ respectivement. Ces applications sont appelées *la première et la deuxième projections canoniques*.

**1.2.4. Définition.** — Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. On désigne par $g \circ f$ l'application de $E$ dans $G$ qui associé à chaque $x \in E$ l'élément $g(f(x)) \in G$. L'application $g \circ f$ est appelée la *composée* de $g$ et $f$.

**1.2.5. Remarque.** — Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. La composition des applications définit une application

$$\mathrm{App}(E,F) \times \mathrm{App}(F,G) \longrightarrow \mathrm{App}(E,G), \quad (f,g) \longmapsto g \circ f.$$

**1.2.6. Proposition.** — *Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ quatre ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

*Démonstration.* — Pour tout $x \in E$, on a

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

et

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

D'après la proposition 1.2.2, on obtient $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

**1.2.7. Proposition.** — *Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On a $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.*

*Démonstration.* — Pour tout $x \in E$ on a

$$(\mathrm{Id}_F \circ f)(x) = \mathrm{Id}_F(f(x)) = f(x)$$

et

$$(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x).$$

□

**1.2.8. Définition.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $A$ un sous-ensemble de $E$. On appelle *la restriction de $f$ à $A$* la composée de $f$ avec l'application d'inclusion $i_A : A \to E$, notée $f|_A$.

**1.2.9. Définition.** — Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Si $A$ est un sous-ensemble de $E$, on désigne par $f(A)$ le sous-ensemble de $F$ constitué par les éléments de la forme $f(x)$, où $x \in E$. L'ensemble $f(A)$ est appelé *l'image de $A$ par l'application $f$*. Si $B$ est un sous-ensemble de $F$, on désigne par $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de $E$ constitué par les éléments $x \in E$ tels que $f(x) \in B$, appelé *l'image réciproque de $B$ par l'application $f$*.

**1.2.10. Définition.** — Soit $f : E \to F$ une application d'ensembles. On dit que $f$ est *inversible* s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

**1.2.11. Proposition-définition.** — *Soit $f : E \to F$ une application d'ensembles. Si $f$ est inversible, alors il existe une unique application de $F$ dans $E$, que l'on note $f^{-1}$, telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Cette application est appelée* l'inverse *de $f$. L'application $f^{-1}$ est aussi inversible et on a $(f^{-1})^{-1} = f$.*

*Démonstration.* — L'existence de $f^{-1}$ provient de la définition.

Soient $g_1$ et $g_2$ deux applications de $F$ dans $E$ telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{Id}_F$. On a

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{Id}_F = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{Id}_E \circ g_2 = g_2,$$

où les première et dernière égalités proviennent de la proposition 1.2.7, et l'égalité au milieu résulte de la proposition 1.2.6. Cela montre l'unicité de l'inverse de $f$.

Le deuxième énoncé est issu de la définition d'une bijection. L'égalité $(f^{-1})^{-1} = f$ est une conséquence de l'unicité de l'inverse de $f^{-1}$. □

**1.2.12. Définition.** — Soit $f : E \to F$ une application d'ensembles. On dit que $f$ est *injective* si, pour tout couple $(x, y)$ d'éléments *distincts* de $E$, on a $f(x) \neq f(y)$. On dit que $f$ est *surjective* si $f(E) = F$. On dit que $f$ est une *bijection* si $f$ est à la fois injective et surjective.

**1.2.13. Proposition.** — *Soit $f : E \to F$ une application d'ensembles.*

(1) *L'application $f$ est injective si et seulement si, pour tout ensemble $G$ et tout couple $(g_1, g_2)$ d'applications de $G$ dans $E$, la relation $f \circ g_1 = f \circ g_2$ entraîne $g_1 = g_2$.*

(2) *L'application $f$ est surjective si et seulement si, pour tout ensemble $H$ et tout couple $(h_1, h_2)$ d'applications de $F$ dans $H$, la relation $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ entraîne $h_1 = h_2$.*

(3) *L'application $f$ est inversible si et seulement si elle est une bijection.*

*Démonstration.* — (1) On suppose que $f$ est injective. Si $G$ est un ensemble et si $g_1$ et $g_2$ sont des applications de $G$ dans $E$ telles que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, alors, pour tout $x \in E$, on a

$$f(g_1(x)) = (f \circ g_1)(x) = (f \circ g_2)(x) = f(g_2(x)),$$

d'où $g_1(x) = g_2(x)$ car $f$ est injective. On obtient donc $g_1 = g_2$.

Dans le cas où $f$ n'est pas injective, il existe deux éléments distincts $x_1$ et $x_2$ de $E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $g_i$ l'application de $\{0\}$ dans $E$ qui associe à 0 l'élément $x_i$ de $E$. Les applications $g_1$ et $g_2$ sont différentes. Cependant, les applications composées $f \circ g_1$ et $f \circ g_2$ sont identiques.

(2) On suppose que l'application $f$ est surjective. Si $H$ est un ensemble et si $h_1$ et $h_2$ sont des applications de $F$ dans $H$ telles que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, alors pour tout $y \in F$ on a $h_1(y) = h_2(y)$ car il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui conduit à $h_1(y) = h_1(f(x)) = h_2(f(x)) = h_2(y)$. On obtient donc $h_1 = h_2$.

Si l'application $f$ n'est pas surjective, il existe $y \in F$ qui n'appartient pas à $f(E)$. Soit $h_1$ l'application de $F$ dans $\{0, 1\}$ qui associe 0 à tout élément de $F$. Soit $h_1$ l'application de $F$ dans $\{0, 1\}$ qui associe 0 à tout élément de $F \setminus \{y\}$ mais associe

1 à $y$. Les applications $h_1$ et $h_2$ sont différentes. Cependant, $h_1 \circ f$ et $h_2 \circ f$ sont identiques car, pour tout $x \in E$, on a $f(x) \neq y$ et donc

$$h_1(f(x)) = 0 = h_2(f(x)).$$

(3) On suppose d'abord que $f$ est inversible. Si $G$ est un ensemble et $g_1$ et $g_2$ sont des applications de $G$ dans $E$ telles que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, on a alors

$$g_1 = \mathrm{Id}_E \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_1 = f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2) = (f^{-1} \circ f) \circ g_2 = \mathrm{Id}_E \circ g_2 = g_2.$$

Similairement, pour tout ensemble $H$ et toutes applications $h_1$ et $h_2$ de $F$ dans $H$ telles que $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, on a

$$h_1 = h_1 \circ \mathrm{Id}_F = h_1 \circ (f \circ f^{-1}) = (h_1 \circ f) \circ f^{-1} = (h_2 \circ f) \circ f^{-1} = h_2 \circ (f \circ f^{-1}) = h_2 \circ \mathrm{Id}_F = h_2.$$

Par conséquent, l'application $f$ est injective et surjective.

Réciproquement, on suppose que $f$ est injective et surjective. Pour tout $y \in F$, il existe un et un seul élément de $E$, que l'on note $g(y)$, tel que $f(g(y)) = y$. On obtient ainsi une application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Pour tout $x \in E$ on a $g(f(x)) = x$ car $x$ est le seul élément de $E$ auquel $f(x) \in F$ est associé par $f$. Ainsi $f$ est inversible. □

## 1.3. Relation d'ordre

**1.3.1. Définition.** — Soit $E$ un ensemble. On appelle *relation binaire* sur $E$ tout sous-ensemble de $E \times E$. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur $E$, pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, on utilise l'expression $x\mathcal{R}y$ pour désigner l'énoncé

« $(x, y)$ *appartient à* $\mathcal{R}$ ».

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. Si $F$ est un sous-ensemble de $E$, alors l'intersection de $\mathcal{R}$ avec $F \times F$ est une relation binaire sur $F$, appelée la *restriction de* $\mathcal{R}$ *à* $F$.

On dit qu'une relation binaire $\leqslant$ est une *relation d'ordre* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) pour tout $x \in E$, $x \leqslant x$;
(b) pour tout $(x, y) \in E \times E$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$;
(c) pour tous éléments $x$, $y$ et $z$ de $E$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

On appelle *ensemble ordonné* tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

**1.3.2. Remarque.** — Si $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, alors, pour tout sous-ensemble $F$ de $E$, la restriction de $\leqslant$ à $F$ est une relation d'ordre sur $F$.

**1.3.3. Exemple.** — Soit $E$ un ensemble (rappelons que les éléments de $E$ sont des ensembles). La relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $E$.

**1.3.4. Définition.** — Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

(1) On dit qu'un élément $x \in E$ est un *majorant* de $A$ si, pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant x$.
(2) On appelle *plus grand élément* de $A$ tout élément de $A$ qui est un majorant de $A$.
(3) On dit qu'un élément $y \in E$ est un *minorant* de $A$ si, pour tout $a \in A$, on a $y \leqslant a$.
(4) On appelle *plus petit élément* de $A$ tout élément de $A$ qui est un minorant de $A$.

**1.3.5. Proposition.** — *Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.*

(1) *Si $A$ possède un plus grand élément, alors son plus grand élément est unique.*
(2) *Si $A$ possède un plus petit élément, alors son plus petit élément est unique.*

*Démonstration.* — (1) Soient $x_1$ et $x_2$ des plus grands éléments de $A$. Comme $x_1$ appartient à $A$ et $x_2$ est un majorant de $A$, on a $x_1 \leqslant x_2$. De même, comme $x_2 \in A$ et $x_1$ est un majorant de $A$, on a $x_2 \leqslant x_1$. Par la condition (b) de la définition 1.3.1, on obtient $x_1 = x_2$.

La démonstration de la deuxième énoncé est similaire à celle du premier. On omit les détails. □

**1.3.6. Définition.** — Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A$ un sous-ensemble de $E$. Si l'ensemble des majorant de $A$ possède un plus petit élément, on appelle ce (unique) plus petit élément la *borne supérieure* de $A$, noté $\sup A$. Si l'ensemble des minorant de $A$ possède un plus grand élément, on appelle ce (unique) plus grand élément la *borne inférieure* de $A$, noté $\inf A$. On souligne que les bornes supérieure inférieure dépendent de l'ensemble ordonné ambiant. Au contraire, les plus grand et plus petit éléments ne dépendent que de la restriction de la relation d'ordre.

**1.3.7. Définition.** — Soit $E$ un ensemble.

(a) On appelle *relation d'ordre total* sur $E$ toute relation d'ordre $\leqslant$ sur $E$ telle que, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Un ensemble muni d'une relation d'ordre total est appelé un *ensemble totalement ordonné*.
(b) On appelle *bon ordre* sur $E$ toute relation d'ordre $\leqslant$ telle que tout sous-ensemble *non vide* de $E$ possède un plus petit élément. Un ensemble muni d'un bon ordre est appelé un *ensemble bien ordonné*.

**1.3.8. Proposition.** — *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble bien ordonné. Alors $\leqslant$ est une relation d'ordre total.*

*Démonstration.* — Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$. Comme $\leqslant$ est un bon ordre, l'ensemble $\{x, y\}$ possède un plus petit élément. On obtient donc $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. □

**1.3.9. Proposition.** — *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Si $\leqslant$ est une relation d'ordre total (resp. bon ordre), alors, pour tout sous-ensemble $F$ de $E$, la restriction de $\leqslant$ à $F$ l'est aussi.*

*Démonstration.* — On suppose que $\leqslant$ est une relation d'ordre total. Pour tout $(x, y) \in F \times F$, on a $(x, y) \in E \times E$. Donc $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

On suppose que $\leqslant$ est un bon ordre. Pour tout sous-ensembl non vide $F_0$ de $F$, $F_0$ est un sous-ensemble non vide de $E$. Donc $F_0$ possède un plus petit élément. □

## 1.4. Ordinaux

**1.4.1. Notation.** — Dans ce paragraphe, si $A$ et $B$ sont deux ensemble, on utilise l'expression $A \leqslant B$ pour désigner l'énoncé "$A \in B$ *ou* $A = B$".

**1.4.2. Définition.** — On dit qu'un ensemble $\alpha$ est un *nombre ordinal* (de von Neumann) si tout élément de $\alpha$ est un sous-ensemble de $\alpha$ et si $\alpha$ est bien ordonné par $\leqslant$.

**1.4.3. Remarque.** — Si $\alpha$ est un nombre ordinal et si $(x, y) \in \alpha$, alors une et une seule des conditions suivantes est satisfaite

$$x \in y, \quad x = y, \quad y \in x.$$

**1.4.4. Lemme.** — *Soit $\alpha$ un nombre cardinal. Si $(x, y) \in \alpha \times \alpha$ est tel que $x \in y$, alors $x \subset y$.*

*Démonstration.* — Comme $x$ est un élément de $\alpha$, par la définition de nombre ordinal, on a $x \subset \alpha$. Donc tout élément $z$ de $x$ est un élément de $\alpha$. On a alors $z \leqslant x$ et $x \leqslant y$, ce qui implique que $z \leqslant y$ puisque $\leqslant$ est supposée être une relation d'ordre sur $\alpha$. En outre, l'égalité $z = y$ ne peut pas être satisfaite car sinon on a $y = z = x$, ce qui contredit $x \in y$. On obtient donc $z \in y$. Ainsi $x$ est un sous-ensemble de $y$. □

**1.4.5. Proposition.** —

(1) *Soit $\alpha$ un nombre ordinal. Tous les éléments de $\alpha$ sont des nombres ordinaux.*
(2) *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux. Alors $\beta \subset \alpha$ si et seulement si $\beta \leqslant \alpha$.*
(3) *Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de nombres cardinaux paramétrée par un ensemble non vide $I$. Alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} \alpha_i$ est un nombre cardinal.*
(4) *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux. Alors $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$. En particulier, si $\alpha \not\subset \beta$, alors $\beta \in \alpha$.*
(5) *Tout ensemble de nombres cardinaux est bien ordonné par $\subset$ (ou de façon équivalente, par $\leqslant$).*
(6) *Si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres ordinaux paramétrée par un ensemble, alors $\bigcup_{i \in I} \alpha_i$ est un nombre ordinal.*
(7) *Si $\alpha$ est un nombre ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est aussi un nombre ordinal.*
(8) *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux. Si $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha \cup \{\alpha\}$, alors $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$.*

(9) *Pour tout nombre ordinal $\alpha$, on a $\bigcup_{x\in\alpha\cup\{\alpha\}} x = \alpha$. En particulier, si $\beta$ est un autre nombre ordinal tel que $\alpha\cup\{\alpha\} = \beta\cup\{\beta\}$, alors on a $\alpha = \beta$.*

*Démonstration.* — (1) Soit $\beta$ un élément de $\alpha$. D'après la définition de nombre ordinal, tout élément $\gamma$ de $\beta$ est un élément de $\alpha$, et donc est un sous-ensemble de $\beta$ d'après le lemme 1.4.4. En outre, tout sous-ensemble non vide de $\beta$ est également un sous-ensemble non vide de $\alpha$, donc possède un plus petit élément.

(2) On suppose que $\beta \neq \alpha$. Soit $\gamma$ le plus petit élément de $\alpha\setminus\beta$. Montrons d'abord que $\gamma \subset \beta$. On suppose par absurde que $\gamma$ admet un élément $x$ qui n'appartient pas à $\beta$. D'après la définition de nombre ordinal, $x$ est un élément de $\alpha$, donc $x \in \alpha \setminus \beta$. Comme $\gamma$ est le plus petit élément de $\alpha \setminus \beta$, on a $\gamma \leqslant x$. Cela conduit à une contradiction (voir la remarque 1.4.3).

La relation $\gamma \subset \beta$ montre que $\beta \notin \gamma$ car sinon le lemme 1.4.4 conduit à $\beta \subset \gamma$ et donc $\beta = \gamma$, ce qui contredit $\beta \in \gamma$. En outre, par définition on a $\gamma \notin \beta$. On obtient alors que $\gamma = \beta$. Donc $\beta$ est un élément de $\alpha$.

(3) Soit $\alpha = \bigcap_{i\in I} \alpha_i$. D'après la proposition 1.3.9, $\alpha$ est bien ordonné par $\leqslant$. Il suffit de montrer que tout élément de $\alpha$ est un sous-ensemble de $\alpha$. Si $\beta \in \alpha$, alors on a $\beta \in \alpha_i$ pour tout $i \in I$. On en déduit que $\beta \subset \alpha_i$ pour tout $i \in I$ et donc $\beta \subset \alpha$.

(4) D'après (3), $\alpha\cap\beta$ est un nombre cardinal. Si $\alpha\cap\beta \neq \alpha$ et $\alpha\cap\beta \neq \beta$, on aurait $\alpha\cap\beta \in \alpha$ et $\alpha\cap\beta \in \beta$, ce qui conduit à une contradiction : $\alpha\cap\beta \in \alpha\cap\beta$.

(5) Soit $M$ un ensemble de nombres ordinaux. L'énoncé (2) montre que, pour tout couple $(\alpha, \beta)$ d'éléments de $M$, $\beta \subset \alpha$ si et seulement si $\beta \leqslant \alpha$. Soient $A$ un sous-ensemble de $E$ et $\alpha \in A$. Si $\alpha \cap A = \varnothing$, alors $\alpha$ est le plus petit élément de $A$ car l'existence d'un élément $x$ de $A$ avec $x \in \alpha$ conduit à $x \in \alpha \cap A$. Si $\alpha \cap A \neq \varnothing$, alors $\alpha\cap A$ admet un plus petit élément $\beta$ (car $\alpha\cap A$ est un sous-ensemble du nombre cardinal $\alpha$). On obtient alors $\beta \cap A = \varnothing$ (s'il existe $y \in \beta \cap A$, alors $y \in \alpha$, ce qui conduit à $y \in \alpha \cap A$). Donc $\beta$ est le plus petit élément de $A$.

(6) Soit $M = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$. D'après l'énoncé (1), $M$ est un ensemble constitué par des nombres ordinaux. Par les énoncés (2) et (5) on obtient alors que $M$ est bien ordonné par $\leqslant$. Il reste à montrer que tout élément de $M$ est un sous-ensemble de $M$. Soit $x \in M$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in \alpha_i$. Comme $\alpha_i$ est un nombre ordinal, on obtient $x \subset \alpha_i \subset M$.

(7) D'après (1), (2) et (5), l'ensemble $\alpha \cup \{\alpha\}$ est bien ordonné par $\leqslant$. En outre, par définition $\alpha$ est un sous-ensemble de $\alpha \cup \{\alpha\}$. Si $x$ est un élément de $\alpha$, alors il est un sous-ensemble de $\alpha$, et donc un sous-ensemble de $\alpha \cup \{\alpha\}$.

(8) On suppose que $\alpha \in \beta$. Comme $\beta$ est un nombre ordinal, on a $\alpha \subset \beta$. Ainsi $\alpha \cup \{\alpha\} \subset \beta$. En outre, d'après l'énoncé (2) on a $\beta \subset \alpha \cup \{\alpha\}$. Donc on obtient l'égalité $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$.

(9) Tout élément de $\alpha = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un sous-ensemble de $\alpha$. Donc on a $\bigcup_{x\in\alpha\cup\{\alpha\}} x = \alpha$. De même, $\bigcup_{x\in\beta\cup\{\beta\}} x = \beta$. D'où $\alpha = \beta$. □

**1.4.6. Définition.** — Soit $\alpha$ un nombre ordinal. Le nombre ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ est appelé le *successeur* de $\alpha$ et noté $\alpha + 1$. Un nombre ordinal non vide qui n'est successeur d'aucun nombre ordinal est appelé un *nombre ordinal limite*. On dit qu'un nombre ordinal $\alpha$ est *fini* si aucun nombre ordinal contenu dans $\alpha$ n'est un nombre ordinal limite.

**1.4.7. Exemples.** — L'ensemble vide est un nombre ordinal, que l'on note 0. Les entiers naturels peuvent être construits comme des nombres ordinaux de la façon suivante :

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Par exemple, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

**1.4.8. Proposition.** — *Un nombre ordinal $\alpha$ est fini si et seulement si tout sous-ensemble non vide de $\alpha$ a un plus grand élément.*

*Démonstration.* — On suppose d'abord que $\alpha$ est fini. Soit $M$ un sous-ensemble non vide de $\alpha$. D'après la proposition 1.4.5 (6), $\beta = \bigcup_{x \in M} x$ est un nombre ordinal. Pour tout $x \in M$, on a $x \subset \alpha$. On en déduit $\beta \subset \alpha$ et donc $\beta \leqslant \alpha$ (d'après la proposition 1.4.5 (2)). Si $\beta$ appartient à $M$, alors il est sans doute un plus grand élément de $M$. Si $\beta$ n'appartient pas à $M$, alors pour tout $x \in M$ on a $x \subset \beta$ et $x \neq \beta$, et donc $x \in \beta$ (d'après la proposition 1.4.5 (2)). Cela montre que $\beta = \bigcup_{x \in M} x \subset \bigcup_{x \in \beta} \beta$. Donc $\beta$ est un nombre ordinal limite.

Réciproquement, on suppose que tout sous-ensemble non vide de $\alpha$ a un plus grand élément. Soit $\beta$ un nombre ordinal non vide tel que $\beta \leqslant \alpha$. Comme un sous-ensemble de $\alpha$, $\beta$ a donc un plus grand élément $\gamma$. On obtient alors que $\gamma = \bigcup_{x \in \beta} x$ et donc $\beta = \gamma + 1$ n'est pas un nombre ordinal limite. $\square$

**1.4.9. Remarque.** — L'axiome de l'infini de Zermelo-Fraenkel demande qu'il existe un nombre cardinal non vide $\alpha$ qui est stable par l'opération de successeur. En d'autres termes,

$$\forall\, x \in \alpha, \quad x + 1 \in \alpha.$$

En particulier, ce nombre ordinal n'a pas de plus grand élément, et donc est infini d'après la proposition 1.4.8. L'ensemble des nombres cardinaux limites contenus dans $\alpha$ est donc non vide. On désigne par $\mathbb{N}$ le plus petit élément de cet ensemble (dont l'existence est assurée par la proposition 1.4.5 (5))

**1.4.10. Proposition.** — *Pour tout nombre ordinal infini $\beta$, on a $\mathbb{N} \subset \beta$. En outre, le nombre ordinal $\mathbb{N}$ s'identifie à l'ensemble des nombres ordinaux finis.*

*Démonstration.* — Soit $\beta$ un nombre ordinal infini. On suppose que $\mathbb{N} \not\subset \beta$. D'après la proposition 1.4.5 (4), on a $\beta \in \mathbb{N}$. Comme $\beta$ est infini, il existe un nombre ordinal limite $y$ tel que $y \subset \beta$. On a alors $y \in \mathbb{N}$, ce qui n'est pas possible car $\mathbb{N}$ est le plus petit nombre cardinal limite contenu dans $\alpha$.

Le premier énoncé montre que tout nombre ordinal infini n'appartient pas à $\mathbb{N}$. Il reste à vérifier que tout nombre ordinal fini appartient à $\mathbb{N}$. Par définition, $\mathbb{N}$ est un nombre ordinal limite. En particulier, pour tout nombre ordinal fini $n$, on a $\mathbb{N} \not\subset n$ et donc $n \in \mathbb{N}$ d'après la proposition 1.4.5 (4).

$\square$

## 1.5. Cardinaux

**1.5.1. Définition.** — Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés, et $f : E \to F$ une application.

(a) On dit que $f$ est *croissante* si, pour tout $(x, y) \in E \times E$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(x) \preccurlyeq f(y)$. On dit que $f$ est *strictement croissante* si, pour tout $(x, y) \in E \times E$ tel que $x \leqslant y$ et $x \neq y$, on a $f(x) \preccurlyeq f(y)$ et $f(x) \neq f(y)$.

(b) On dit que $f$ est *décroissante* si, pour tout $(x, y) \in E \times E$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(y) \preccurlyeq f(x)$. On dit que $f$ est *strictement décroissante* si, pour tout $(x, y) \in E \times E$ tel que $x \leqslant y$ et $x \neq y$, on a $f(y) \preccurlyeq f(x)$ et $f(x) \neq f(y)$.

(c) On dit que $f$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante. On dit que $f$ est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

(d) On dit que $f$ est un *isomorphisme d'ensembles ordonnés* si $f$ est une bijection croissante dont l'inverse est aussi croissante.

## 1.6. Liste de symboles

| | | |
|---|---|---|
| $\varnothing$ | ensemble vide | 空集 |
| $\forall$ | pour tout | 对任意 |
| $\exists$ | il existe | 存在 |
| $\in$ | appartenir à | 属于 |
| $\notin$ | n'appartenir pas à | 不属于 |
| $\subset$ | être sous-ensemble de | 包含于 |
| $\subsetneq$ | être sous-ensemble strict de | 真包含于 |
| $\not\subset$ | n'être pas sous-ensemble de | 不包含于 |

### 1.7. Liste de notions

| | |
|---|---|
| ensemble | 集合 |
| sous-ensemble | 子集 |
| complémentaire | 补集 |
| intersection | 交集 |
| disjoints | 不交 |
| union | 并集 |
| produit cartésien | 笛卡尔积 |
| application | 映射 |
| application d'inclusion | 嵌入映射 |
| application d'identité | 恒同映射 |
| projection | 投影 |
| composée | 复合 |
| restriction | 限制 |
| image | 像 |
| image réciproque | 逆像 |
| application injective | 单射 |
| application surjective | 满射 |
| bijection | 双射 |
| application inversible | 可逆映射 |
| inverse | 逆 |
| relation binaire | 二元关系 |
| relation d'ordre | 序关系 |
| majorant | 上界 |
| minorant | 下界 |
| plus grand élément | 最大元 |
| plus petit élément | 最小元 |
| nombre ordinal | 序数 |
| entier naturel | 自然数 |
| borne supérieure | 上确界 |
| borne inférieure | 下确界 |
| croissante | 单调递增 |
| décroissante | 单调递减 |
| strictement croissante | 严格单调递增 |
| strictement décroissante | 严格单调递减 |
| monotone | 单调 |
| strictement monotone | 严格单调 |