Université Paris Diderot
DULCIF 2018-2019

Feuille d'exercice 1

1. Soient E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer les égalités suivantes :

(a) $E \setminus (E \setminus A) = A$

(b) $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

(c) $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

(d) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

2. Soit $f : E \to F$ une application d'ensembles.

(a) Montrer que, si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles de E, alors $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(b) Montrer que, si B_1 et B_2 sont deux sous-ensembles de F, alors $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(c) Montrer que, pour tout $A \subset E$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(d) Montrer que, pour tout $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(e) On suppose que f est injective. Montrer que, pour tout $A \subset E$, on a $A = f^{-1}(f(A))$.

(f) On suppose que f est surjective. Montrer que, pour tout $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

3. Établir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

4. Établir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

5. Soit E un ensemble. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E. Montrer qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

6. Soit E un ensemble. On suppose qu'il existe une application injective $f : E \to E$ qui n'est pas une bijection. Montrer qu'il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans E.

7. Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $f : E \to E$ une application croissante. On suppose que l'ensemble

$$\{x \in E \mid x \leqslant f(x)\}$$

admet une borne supérieure s. Montrer que $f(s) = s$.