Université Paris Diderot
DULCIF 2018-2019

Feuille d'exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, soit
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(1) Montrer que H_n peut s'écrire sous la forme p_n/q_n, où p_n est un entier impair et q_n est un entier pair.

(2) En déduire que H_n n'est jamais un entier.

(3) Montrer que l'ensemble $\{H_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ n'a pas de majorant dans $\mathbb{R}$.

2. Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit
$$S_k(n) = 1^k + \cdots + n^k.$$

(1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} S_i = (n+1)^{k+1} - 1.$$

(2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_k de degré $k+1$ dans $\mathbb{Q}[T]$ tel que $S_k(n) = P_k(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

(3) Déterminer les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4.

3. On garde la notation de $S_k(n)$ de l'exercice précédent en supposant que k est impair.

(1) On suppose que n est impair. Montrer les relations
$$S_k(n) = n^k + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \bigl(i^k + (n-i)^k\bigr) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \bigl(j^k + (n+1-j)^k\bigr).$$

(2) On suppose que n est pair. Montrer les relations
$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n/2} \Bigl(i^n + (m+1-i)^n\Bigr) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \Bigl(j^k + (n-j)^k\Bigr).$$

(3) Montrer que $S_k(n)$ est divisible par $n(n+1)/2$.

4. Parmi les ensembles munis de lois de composition internes, lesquels sont des semi-groupes, monoïdes, groupes ?

(1) $(\mathbb{N}, +)$

(2) $(\mathbb{N}_{>0}, +)$

(3) $(\mathbb{Z}, +)$

(4) $(\mathbb{N}, \times)$

(5) $(\mathbb{N}_{>0}, \times)$

(6) $\bigl(S(X) = \{\text{bijections } X \to X\}, \circ\bigr)$, où X est un ensemble