Université Paris Diderot
DULCIF 2018-2019

Feuille d'exercice 3

1. Soit G l'ensemble $]-1,1[$.

(1) Montrer que, pour tout $(x,y) \in G \times G$, l'élément

$$x * y := \frac{x+y}{1+xy}$$

est bien défini est appartient à G.

(2) Montrer que $(G,*)$ forme un groupe commutatif. Préciser son élément neutre.

(3) Construire un isomorphisme de $(G,*)$ dans $(\mathbb{R},+)$.

2. On considère la loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x * y = x + y - xy.$$

(1) Montrer que $*$ est associative.

(2) Montrer que $*$ est commutative.

(3) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ admet un élément neutre par rapport à la loi de composition $*$.

(4) Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{R}$ par rapport à la loi de composition $*$.

(5) Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\underbrace{x * \cdots * x}_{n \text{ copies}}$, où n est un entier, $n \geqslant 2$.

3. Soit A un anneau commutatif intègre. On dit que A est un anneau euclidien s'il existe une application $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ qui vérifie la condition suivante :

pour tout $(a,b) \in A \times (A \setminus \{0\})$*, il existe* $(q,r) \in A \times A$ *tel que* $a = bq + r$ *et que* $r = 0$ *ou* $v(r) < v(b)$.

L'application v est appelée un stathme de A.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien.

(2) Montrer que, si k est un corps, alors l'anneau des polynôme $k[T]$ est un anneau euclidien.

(3) Montrer que tout anneau euclidien est principal.