CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES

1.1. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

1.1.1. Définition. — On appelle *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ tout ensemble *non vide* V (dont les éléments sont appelés des *vecteurs*) muni d'une loi de composition interne (appelée *addition*)

$$V \times V \longrightarrow V, \quad (x, y) \longmapsto x + y$$

et d'une loi de composition externe (appelée *multiplication par un scalaire*)

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (a, x) \longmapsto ax,$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) pour tout $(x, y) \in V \times V$, $x + y = y + x$ (commutativité),

(ii) pour tout $(x, y, z) \in V \times V \times V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité),

(iii) il existe $\mathbf{0} \in V$ tel que, pour tout $x \in V$, $x + \mathbf{0} = x$ (vecteur nul),

(iv) pour tout $x \in V$, il existe $-x \in V$ tel que $x + (-x) = \mathbf{0}$ (vecteur opposé),

(v) pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in V \times V$, $a(x + y) = ax + ay$,

(vi) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et tout $x \in V$, $(a + b)x = ax + bx$,

(vii) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et tout $x \in V$, $(ab)x = a(bx)$

(viii) pour tout $x \in V$, $1x = x$.

1.1.2. Exemple. — (1) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni des lois de composition

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$a(b_1, \ldots, b_n) := (ab_1, \ldots, ab_n)$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(2) Plus généralement, si I est un ensemble, on désigne par $\mathbb{R}^I$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. Tout élément de $\mathbb{R}^I$ peut s'écrire sous la forme $(a_i)_{i\in I}$, où chaque a_i est un nombre réel. Muni des lois de composition

$$\begin{gathered}(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} := (a_i + b_i)_{i\in I}\\ a(b_i)_{i\in I} := (ab_i)_{i\in I},\end{gathered}$$

l'ensemble $\mathbb{R}^I$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(3) Soient V et W deux espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le produit cartésien $V \times W$ muni des lois de composition

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'), \quad a(x, y) := (ax, ay)$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, appelé produit de V et W.

1.1.3. Lemme. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si x, y et z sont trois vecteurs de V tels que $x + z = y + z$, alors on a $x = y$. En particulier, si x est un élément de V et s'il existe $z \in V$ tel que $x + z = z$, alors $x = \mathbf{0}$.*

Démonstration. — Pour tout $v \in V$, on a

$$v = v + \mathbf{0} = v + (z + (-z)) = (v + z) + (-z),$$

où la première égalité provient de la condition (iii), la deuxième provient de (iv), et la dernière provient de (ii). Si on applique cette égalité aux cas où $v = x$ et $v = y$ respectivement, on obtient

$$x = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y.$$

Le deuxième énoncé provient du premier et le fait que $\mathbf{0} + z = z$ (conséquence de (iii) et (i)). □

1.1.4. Proposition. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in V$, $0x$ s'identifie au vecteur nul.*

Démonstration. — D'après la condition (vi) on a

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x. \tag{1.1}$$

Par le lemme 1.1.3 on en déduit $0x = \mathbf{0}$. □

1.1.5. Proposition. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a\mathbf{0}$ s'identifie au vecteur nul.*

Démonstration. — D'après la condition (iii), on a $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Par la condition (vi) on en déduit

$$a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}. \tag{1.2}$$

D'après le lemme 1.1.3, on obtient $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. □

1.1.6. Proposition. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in V$ on a $(-1)x = -x$.*

Démonstration. — D'après la condition (viii) On a

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \mathbf{0} = x + (-x),$$

où la deuxième égalité provient de (vi), la quatrième provient de la proposition 1.1.4, et la dernière provient de (iv). Par la commutativité de l'addition on en déduit $(-1)x + x = (-x) + x$. D'après le lemme 1.1.3 on obtient $(-1)x = -x$. □

1.1.7. Définition. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in V \times V$, on désigne par $x - y$ l'élément $x + (-y) \in V$. On a

$$(x - y) + y = x + ((-y) + y) = x + \mathbf{0} = x.$$

D'après le lemme 1.1.3, si $x - y = \mathbf{0}$, alors on a $x = y$.

1.1.8. Définition. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'un sous-ensemble *non vide* W de V est un *sous-espace vectoriel* de V s'il est stable par les lois de composition de V, ou de façon équivalente,

$$\forall\,(x, y) \in W \times W,\ \forall\,(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ax + by \in W.$$

1.1.9. Remarque. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Tout sous-espace vectoriel W de V contient le vecteur nul. En effet, W contient au moins un élément x de V, et donc

$$\mathbf{0} = x + (-x) = 1x + (-1)x \in W,$$

où la première égalité provient de la condition (iv) et la deuxième provient de la proposition 1.1.6.

1.1.10. Exemple. — (1) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble $\{\mathbf{0}\}$ du vecteur nul de V est un sous-espace vectoriel de V.

(2) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si $(W_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de V, alors l'intersection des W_i est un sous-espace vectoriel de V.

(3) Soit S un sous-ensemble de V. On désigne par $\mathrm{Vect}(S)$ l'intersection des sous-espaces vectoriels de V contenant S. C'est un sous-espace vectoriel de V, appelé le sous-espace vectoriel engendré par S. Tout élément de $\mathrm{Vect}(S)$ s'écrit sous la forme $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, où n est un entier tel que $n \geqslant 1$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$.

(4) Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de V. On désigne par $V_1 + V_2$ le sous-espace vectoriel de V engendré par $V_1 \cup V_2$. Tout vecteur de $V_1 + V_2$ est de la forme $x + y$ avec $(x, y) \in V_1 \times V_2$.

1.2. Applications linéaires

1.2.1. Définition. — Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $f : V \to W$ est *linéaire* si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall\,(x,y) \in V \times V,\ \forall\,(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(ax+by) = af(x) + bf(y).$$

Dans le cas particulier où $W = \mathbb{R}$, une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$ est appelée une *forme linéaire* sur V.

1.2.2. Remarque. — Soit $f : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Si x et y sont deux éléments de V, on a

$$f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x+(-1)y) = f(x) + (-1)f(y) = f(x) - f(y),$$

où la seconde égalité provient de

1.2.3. Remarque. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit e_i l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1 et dont les autres coordonnées sont nulles. On peut écrire un élément général $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ sous la forme

$$(a_1,\ldots,a_n) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n.$$

Si W est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to W$ est une application linéaire, alors f envoie $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ sur

$$f(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n) = a_1f(e_1) + \cdots + a_nf(e_n).$$

Ainsi toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans W est de la forme

$$f(a_1,\ldots,a_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

où pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, x_i est un élément de W (qui est égal à $f(e_i)$).

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Toute application linéaire de V dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme $(x \in V) \mapsto (f_1(x),\ldots,f_n(x))$, où chaque f_i est une forme linéaire sur V.

1.2.4. Proposition. — *Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : V \to W$ une application linéaire. Alors f envoie le vecteur nul de V sur celui de W.*

Démonstration. — Soit x un élément arbitraire de V. D'après la proposition 1.1.4, $0x$ s'identifie au vecteur nul de V. Comme f est une application linéaire, on a $f(0x) = 0f(x)$, qui s'identifie au vecteur nul de W (encore d'après la proposition 1.1.4). □

1.2.5. Exemple. —

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application qui envoie $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ sur x_i. C'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux applications linéaires de V dans W, on désigne par $f+g : V \to W$ l'application qui envoie $x \in V$ sur $f(x)+g(x)$. C'est une application linéaire de V dans W. Si f est une application linéaire de V dans W et si a est un nombre réel, on désigne

par $af : V \to W$ l'application qui envoie $x \in V$ sur $af(x)$. C'est aussi une application linéaire. L'ensemble $\mathscr{L}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W, muni des lois de composition

$$\big((f, g) \in \mathscr{L}(V, W) \times \mathscr{L}(V, W)\big) \longmapsto f + g$$

et

$$\big((a, f) \in \mathbb{R} \times \mathscr{L}(V, W)\big) \longmapsto af,$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2.6. Définition. — Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : V \to W$ une application linéaire. On appelle *noyau* de f le sous-ensemble $\{x \in V \mid f(x) = \mathbf{0}\}$ de V, noté $\mathrm{Ker}(f)$. On appelle *image* de f le sous-ensemble $\{f(x) \mid x \in V\}$ de W, noté $\mathrm{Im}(f)$.

1.2.7. Proposition. — *Soit $f : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de V et l'image de f est un sous-espace vectoriel de W.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.4, l'élément nul de V appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ et donc $\mathrm{Ker}(f)$ est non vide. En outre, si x et y sont deux éléments de $\mathrm{Ker}(f)$ et si a et b appartiennent à $\mathbb{R}$, on a

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = (a + b)\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

où la dernière égalité provient de la proposition 1.1.5. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de V.

Soient z et w deux éléments de $\mathrm{Im}(f)$. Soient x et y des éléments de V tels que $f(x) = z$ et $f(y) = w$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$az + bw = af(x) + bf(y) = f(ax + by) \in \mathrm{Im}(f).$$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de W. □

1.2.8. Définition. — Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments de V. Soit $f : \mathbb{R}^n \to V$ l'application linéaire qui envoie $(a_1, \ldots, a_n)$ sur $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. Tout élément de l'image de f est appelé une *combinaison linéaire* de $(x_i)_{i=1}^n$.

1.2.9. Proposition. — *Soit $f : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.*

(1) *L'application f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(2) *L'application f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = W$.

Démonstration. — (1) D'après la proposition 1.2.4, f envoie le vecteur nul de V sur celui de W. Si f est injectif, alors $\mathbf{0}$ est le seul élément de V qui est envoyé sur le vecteur neutre de W par f, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$, pour tout $(x, y) \in V \times V$ tel que $f(x) = f(y)$, alors

$$\mathbf{0} = f(x) - f(y) = f(x - y),$$

d'où $x - y = \mathbf{0}$ et donc $x = y$.

(2) résulte de la définition de l'image. □

1.2.10. Proposition. — *Soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux application linéaire. Alors l'application composée $g \circ f : E \to G$ est linéaire.*

Démonstration. — Soient x et y deux éléments de E, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$g \circ f(ax + by) = g(f(ax + by)) = g(af(x) + bf(y)) = ag(f(x)) + bg(f(y)).$$

□