CHAPITRE 2

DIMENSION

Dans cette séance, on fixe un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$.

2.1. Familles génératrices, familles libres

2.1.1. Définition. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de n éléments de V. Soit $f : \mathbb{R}^n \to V$ l'application linéaire qui envoie $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sur $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.

(a) On dit que $(x_i)_{i=1}^n$ est une *famille libre* si l'application f est injective, ou de façon équivalente, $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{0}$ entraîne $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(b) On dit que $(x_i)_{i=1}^n$ est une *famille génératrice* ou que V est *engendré par* $(x_i)_{i=1}^n$ si l'application f est surjective, ou de façon équivalente, tout élément de V s'écrit comme une combinaison linéaire de $(x_i)_{i=1}^n$.

(c) On dit que $(x_i)_{i=1}^n$ est une *base* de V s'il est en même temps une famille génératrice et une famille libre, ou de façon équivalente, tout élément de V s'écrit de manière unique sous la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

On dit que V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ s'il admet une famille génératrice formée par un nombre fini d'éléments de V.

2.1.2. Remarque. — Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x_i)_{i=1}^n$ une famille libre dans V. Alors les vecteur $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts. En effet, si i et j sont deux indices différents dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $x_i = x_j$, alors on a $x_i + (-1)x_j = 0$ et donc la famille $(x_i)_{i=1}^n$ ne peut pas être libre.

2.1.3. Proposition. — *Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(x_i)_{i=1}^n$ une famille génératrice de V, où $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un sous-ensemble I_0 de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $(x_i)_{i \in I_0}$ forme une base de V. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ admet une base.*

Démonstration. — Soit Θ l'ensemble des sous-ensembles I de $\{1,\ldots,n\}$ tels que $(x_i)_{i\in I}$ forme une base de V. Cet ensemble est non vide car $\{1,\ldots,n\}\in\Theta$. On choisit un élément I_0 de Θ dont le cardinal est minimal. Montrons par absurde que la famille $(x_i)_{i\in I_0}$ est libre. Supposons qu'il existe $(b_i)_{i\in I_0}\in\mathbb{R}^{I_0}$ tel que tous les b_i ne sont pas nuls et que $\sum_{i\in I_0} b_i x_i = \mathbf{0}$. Soit $i_0\in I_0$ tel que $b_{i_0}\neq 0$. On a alors

$$x_{i_0} = -\sum_{i\in I_0\setminus\{i_0\}} \frac{b_i}{b_{i_0}} x_i. \tag{2.1}$$

Soit y un élément général de V, qui s'écrit comme

$$y=\sum_{i\in I_0} a_i x_i.$$

En utilisant (2.1) on peut réécrire y sous forme de

$$y=\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}}\Big(a_i-\frac{a_{i_0}b_i}{b_{i_0}}\Big)x_i.$$

Ainsi $(x_i)_{i\in I_0\setminus\{i_0\}}$ forme aussi une famille génératrice de V, c'est-à-dire $I\setminus\{i_0\}\in\Theta$. Cela contredit l'hypothèse que $\mathrm{card}(I_0)$ est minimal. La famille $(x_i)_{i\in I_0}$ est donc libre et génératrice, c'est-à-dire une base de V. □

2.1.4. Définition. — Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On appelle *dimension* de V le plus petit cardinal des familles génératrices de V, noté $\dim(V)$. La proposition 2.1.3 montre que toute famille génératrice de V de cardinal $\dim(V)$ est nécessairement une base.

2.1.5. Proposition. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Toute famille libre de V est contenue dans une base de V et toutes les bases de V ont* $\dim(V)$ *comme cardinal.*

Démonstration. — Soit n la dimension de V. Soit $(y_j)_{j=1}^m$ une famille libre de V. Montrons que $(y_j)_{j=1}^m$ est contenue dans une base de V de cardinal n. Par la proposition 2.1.3 on obtient l'existence d'une base $(x_i)_{i=1}^n$ de V dont le cardinal est la dimension de V. On construit de façon récursive une base de V ayant n comme cardinal et qui contient $(y_j)_{j=1}^m$. Quitte à faire des permutations, on peut supposer sans perte de généralité que

$$x_1=y_1,\ldots,x_\ell=y_\ell$$

et que

$$\{x_1,\ldots,x_n\}\cap\{y_1,\ldots,y_m\}=\{x_1,\ldots,x_\ell\}.$$

Si $m=\ell$, alors $(y_j)_{j=1}^m$ est déjà contenue dans $(x_i)_{i=1}^n$; sinon on a $m>\ell$ et on écrit $y_{\ell+1}$ sous la forme

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=a_1y_1+\cdots+a_\ell y_\ell+a_{\ell+1}x_{\ell+1}+\cdots+a_nx_n.$$

Comme $(y_j)_{j=1}^m$ est une famille libre, tous les coefficients $a_{\ell+1},\ldots,a_n$ ne sont pas nuls car sinon

$$a_1y_1+\cdots+a_\ell y_\ell+(-1)y_{\ell+1}=0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_{\ell+1}\neq 0$. Montrons que la famille

$$(y_1,\ldots,y_{\ell+1},x_{\ell+2},\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_\ell,y_{\ell+1},x_{\ell+2},\ldots,x_n)$$

est génératrice (et donc forme une base de V). Soit z un élément général de V, qui s'écrit comme

$$z=b_1x_1+\cdots+b_nx_n.$$

On a

$$x_{\ell+1}=\frac{1}{a_{\ell+1}}y_{\ell+1}-\sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\neq\ell+1}}\frac{a_i}{a_{\ell+1}}x_i,$$

et donc

$$z=\frac{b_{\ell+1}}{a_{\ell+1}}y_{\ell+1}+\sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\}\\ i\neq\ell+1}}\Big(b_i-\frac{b_{\ell+1}a_i}{a_{\ell+1}}\Big)x_i.$$

Si on itère cette procédure, on obtient enfin une base de V de cardinal n qui contient $(y_j)_{j=1}^m$. Le premier énoncé est donc démontré. Enfin, si $(y_j)_{j=1}^m$ est une base de V, on a $m\leqslant n$ car $(y_j)_{j=1}^m$ est contenue dans une base de V de cardinal n, et $m\geqslant n$ par définition. On en déduit donc $m=n$. □

2.1.6. Corollaire. — *Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et W un sous-espace vectoriel de V tel que $W\subsetneq V$. Alors on a $\dim(W)<\dim(V)$.*

Démonstration. — Soit $(x_i)_{i=1}^m$ une base de W. C'est une famille libre dans V. D'après la proposition 2.1.5, $(x_i)_{i=1}^m$ est contenue dans une base de V. Comme $W\subsetneq V$, $(x_i)_{i=1}^m$ n'est pas une famille génératrice de V et donc n'est pas une base de V. Donc on obtient $m=\dim(W)<\dim(V)$. □

2.1.7. Remarque. —
(1) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs dans V, où $n=\dim(V)$. Si la famille $(x_i)_{i=1}^n$ est libre ou génératrice, alors elle est nécessairement une base de V.
(2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Les vecteurs $(e_i)_{i=1}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la *base canonique* de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est égale à n.

***2.1.8. Théorème* (théorème du rang)**. — *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $f:V\to W$ est une application linéaire. On a*

$$\dim(V)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f)).$$

En particulier, dans le cas où V et W ont la même dimension, f est un isomorphisme si et seulement si elle est injective.

Démonstration. — Soient $(x_i)_{i=1}^m$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $(y_j)_{j=m+1}^n$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Pour tout $j \in \{m+1, \ldots, n\}$, on choisit un élément x_j de V tel que $f(x_j) = y_j$. Montrons que les vecteurs $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ forment une base de V. On commence par vérifier que la famille $(x_i)_{i=1}^n$ est libre. Soit $(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \mathbf{0}.$$

On a alors

$$\mathbf{0} = f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = a_{m+1}y_{m+1} + \cdots + a_ny_n.$$

Comme $(y_j)_{j=m+1}^n$ est une famille libre, on a $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$ et donc $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = 0$. Comme $(x_i)_{i=1}^m$ est une famille libre dans V, on en déduit $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Soient x un élément de V et y sont image par f. On écrit y comme $y = b_{m+1}y_{m+1} + \cdots + b_ny_n$. Soit

$$x' = x - b_{m+1}x_{m+1} + \cdots - b_nx_n.$$

On a

$$f(x') = f(x) - b_{m+1}f(x_{m+1}) - \cdots - b_nf(x_n) = y - \sum_{j=m+1}^n b_jy_j = \mathbf{0}.$$

Ainsi x' appartient au noyau de f. Donc il existe $(b_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$x' = b_1x_1 + \cdots + b_mx_m.$$

Ainsi

$$x = x' + b_{m+1}x_{m+1} + \cdots + b_nx_n = \sum_{i=1}^n b_ix_i.$$

Dans le cas où $\dim(V) = \dim(W)$, si f est injective, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ et ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) = \dim(W)$. Donc on a $\mathrm{Im}(f) = W$. $\square$

2.2. Formes linéaires

2.2.1. Définition. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle *forme linéaire* sur V toute application linéaire de V dans $\mathbb{R}$.

2.2.2. Proposition. — *Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $(e_i)_{i=1}^n$ une base de V. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\pi_i : V \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui envoie $\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n$ sur λ_i. Alors $(\pi_i)_{i=1}^n$ forme une base de $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$. En particulier, $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$ est de dimension n.*

Démonstration. — Soit $\varphi : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\pi_i(\lambda_1e_1 + \cdots + \lambda_ne_n).$$

Ainsi $\mathscr{L}(V,\mathbb{R})$ est engendré par $(\pi_i)_{i=1}^n$. Il reste à montrer que la famille $(\pi_i)_{i=1}^n$ est libre. Soit $(a_1,\ldots,a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $a_1\pi_1+\cdots+a_n\pi_n$ soit la forme linéaire nulle. Si on applique cette forme linéaire à e_i on obtient $a_i=0$. □

2.3. Droites et plans

2.3.1. Définition. — On appelle *droite* tout espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{R}$. Toute droite est engendré par un vecteur non nul.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que deux éléments x et y de V sont *colinéaire* s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que $ax+by=\mathbf{0}$.

2.3.2. Proposition. — *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Deux éléments x et y de V sont colinéaire si et seulement s'il existe une droites dans V qui contient $\{x,y\}$.*

Démonstration. — "$\Longleftarrow$" : Soit z un élément non nul de V tel que la droite $\mathbb{R}z$ contient $\{x,y\}$. Il existe alors des nombres réels λ et μ tel que $x=\lambda z$ et $y=\mu z$. Si $(\lambda,\mu)=(0,0)$, alors on a $x=y=\mathbf{0}$ et donc $x+y=\mathbf{0}$. Si $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, alors $(a,b)=(-\mu,\lambda)$ appartient à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et

$$ax+by=-\mu x+\lambda y=-\mu\lambda z+\lambda\mu z=\mathbf{0}.$$

"$\Longleftarrow$" : On suppose que $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est tel que $ax+by=\mathbf{0}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a\neq 0$ et donc $x=-\frac{b}{a}y$. Si $y=\mathbf{0}$ alors $x=\mathbf{0}$ aussi et $\{x,y\}$ est contenu dans n'import quelle droite dans V. Si y est non nul, alors $\{x,y\}$ est contenu dans la droite engendré par y. □

2.3.3. Définition. — On appelle *plan* tout espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Tout plan est engendré par deux vecteurs qui sont non colinéaire.

2.3.4. Exemple. — Soit φ une forme linéaire non nul sur $\mathbb{R}^3$. L'application φ est surjective et la dimension de son image est 1. D'après le théorème 2.1.8, le noyau de φ est de dimension 2 et donc est un plan dans $\mathbb{R}^3$.

2.4. supplémentaire

2.4.1. Définition. — Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E et F deux sous-espaces vectoriels de V. On dit que E et F sont *supplémentaires l'un à l'autre* si tout élément x de V s'écrit de façon unique comme x_E+x_F, où $x_E\in E$ et $x_F\in F$.

2.4.2. Proposition. — *Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E et F deux sous-espaces vectoriels de V. Les sous-espaces vectoriels E et F sont supplémentaires l'un à l'autre si et seulement si $E\cap F=\{\mathbf{0}\}$ et $E+F:=\{x+y\,|\,(x,y)\in E\times F\}=V$.*

Démonstration. — "$\Longrightarrow$" : Soit $x \in E \cap F$. On a

$$x = x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x.$$

Par l'unicité de l'écriture de x comme la somme d'un vecteur dans E et d'un vecteur dans F, on obtient $x = \mathbf{0}$. En outre, par définition on a $E + F = V$.

"$\Longleftarrow$" : Il suffit de montrer l'unicité. Soit x un élément de V, qui s'écrit comme

$$x = x_E + x_F = x'_E + x'_F,$$

où $\{x_E, x'_E\} \subset E$ et $\{x_F, x'_F\} \subset F$. On a alors $x_E - x'_E = x'_F - x_F \in E \cap F = \{\mathbf{0}\}$, d'où $x_E = x'_E$ et $x_F = x'_F$. □

2.4.3. Proposition. — *Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, E et F deux sous-espaces vectoriels de V qui sont supplémentaires l'un à l'autre.*

(1) *L'application p de V dans F qui envoie $x \in V$ sur x_F est linéaire.*

(2) *Pour tout $x \in F$ on a $p(x) = x$. En particulier, l'application p est surjective.*

(3) *On a $p \circ p = p$.*

(4) *Le noyau de p est E.*

(5) *On a $\dim(V) = \dim(E) + \dim(F)$.*

Démonstration. — (1) Soient x et y des éléments de V, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$ax + by = a(x_E + x_F) + b(y_E + y_F) = (ax_E + by_E) + (ax_F + by_F),$$

d'où $p(ax + by) = ax_F + by_F = ap(x) + bp(y)$.

(2) Par la décomposition $x = \mathbf{0} + x$, on obtient $p(x) = x$ quand $x \in F$.

(3) Par définition, pour tout $x \in V$ on a $p(x) \in F$. D'après (2), on obtient $p(x) = x$.

(4) Tout $x \in E$ se décompose comme $x = x + \mathbf{0}$, d'où $p(x) = \mathbf{0}$. Réciproquement, si $x \in V$ est tel que $p(x) = \mathbf{0}$, alors $x = x - p(x) \in E$.

(5) résulte du théorème 2.1.8. □

2.4.4. Définition. — Avec les notation de la proposition 2.4.3, l'application p s'appelle la *projection* dans F le long de E. L'application $s = 2p - \mathrm{Id}$ s'appelle la *symétrique* par rapport à F le long de E.

2.4.5. Remarque. — On garde les notation de la proposition 2.4.3. On désigne par $s = 2p - \mathrm{Id}$ la symétrique par rapport à F le long de E.

(1) Pour tout $z \in F$, on a $s(z) = 2p(z) - z = 2z - z = z$.

(2) Pour tout $y \in E$, on a $s(y) = 2p(y) - y = -y$.

(3) Pour tout $x \in V$, on a $s(x) = s(x_E + x_F) = -x_E + x_F$ et donc $s(s(x)) = x$.