CHAPITRE 1

APPLICATIONS

1.1. Correspondance

1.1.1. Définition. — On appelle *correspondance* tout triplet f de la forme

$$(\mathrm{Dep}(f), \mathrm{Arr}(f), \Gamma_f),$$

où $\mathrm{Dep}(f)$ et $\mathrm{Arr}(f)$ sont des ensembles, et Γ_f est une partie de $\mathrm{Dep}(f) \times \mathrm{Arr}(f)$.

Si X et Y sont des ensembles, et f est une correspondance de la forme (X, Y, Γ_f), on dit que f est une correspondance de X dans Y.

1.1.2. Définition. — Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance, on désigne par f^{-1} la correspondance de Y dans X telle que

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, x) \in Y \times X \ : \ (x, y) \in \Gamma_f\}.$$

Cette correspondance est appelée *réciproque* de f. Par définition on a $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.1.3. Exemple. — Pour tout couple X et Y d'ensembles, le sous-ensemble vide de $X \times Y$ est une correspondance, appelée *correspondance vide* de X dans Y.

1.1.4. Exemple. — Soit X un ensemble. On désigne par Δ_X la diagonale

$$\Delta_X = \{(x, x) \ : \ x \in X\}.$$

La correspondance $\mathrm{Id}_X = (X, X, \Delta_X)$ est appelée *correspondance d'identité* de X. Par définition, on a $\mathrm{Id}_X^{-1} = \mathrm{Id}_X$.

1.2. Images directe et réciproque

1.2.1. Définition. — Soient $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. Pour tout $A \subseteq X$, on désigne par $f(A)$ l'ensemble

$$\{y \in Y \ : \ \exists\, x \in A, \quad (x, y) \in \Gamma_f\} \subseteq Y,$$

appelé *image directe de A par f*. Pour tout $B \subseteq Y$, l'image directe de B par la correspondance réciproque f^{-1} est appelé *image réciproque* de B par f. On a

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,:\, \exists\, y \in B, \quad (x, y) \in \Gamma_f\} \subseteq X.$$

L'ensemble $f(X)$ est appelé *image de f*, noté $\mathrm{Im}(f)$; l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est appelé *domaine de définition de f, noté* $\mathrm{Dom}(f)$.

1.2.2. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance.*

(1) *Soient $A \subseteq X$ et $y \in Y$. L'élément y appartient à $f(A)$ si et seulement si $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.*

(2) *Soient $B \subseteq Y$ et $x \in Y$. L'élément x appartient à $f^{-1}(B)$ si et seulement si $B \cap f(\{y\}) \neq \varnothing$.*

Démonstration. — (1) L'élément y appartient à $f(A)$ si et seulement s'il existe $x \in A$ tel que $(x, y) \in \Gamma_f$. Cela revient à l'existence d'un $x \in A \cap f^{-1}(\{y\})$.

En appliquant (1) à f^{-1}, on obtient (2). □

1.2.3. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance.*

(1) *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On a*

$$f\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

Si I est non vide, on a

$$f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

(2) *Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Y. On a*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

si I est non vide, on a

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Démonstration. — (1) D'après la proposition 1.2.2, on a

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) &= \Big\{y \in Y \,:\, \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing\Big\} \\ &= \Big\{y \in Y \,:\, \bigcup_{i \in I} (A_i \cap f^{-1}(\{y\})) \neq \varnothing\Big\} \\ &= \{y \in Y \,:\, \exists\, i \in I,\ A_i \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing\} = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \end{aligned}$$

$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \Big\{y \in Y \,:\, \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing\Big\}$$
$$\subseteq \{y \in Y \,:\, \forall\, i \in I,\ A_i \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing\} = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

Si on applique (1) à f^{-1}, on obtient (2). □

1.3. Composition

1.3.1. Définition. — Soient f et g des correspondances. On définit une correspondance de $\mathrm{Dep}(f)$ dans $\mathrm{Arr}(g)$ tel que

$$\Gamma_{g\circ f} = \{(x,z) \in \mathrm{Dep}(f) \times \mathrm{Arr}(g) \,:\, \exists\, y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Dom}(g),\ (x,y) \in \Gamma_f,\ (y,z) \in \Gamma_g\}.$$

Par définition, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3.2. Proposition. — *Soient f, g et h des correspondances. On a*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration. — Soit $(x,w) \in \mathrm{Def}(f) \times \mathrm{Arr}(h)$. Par définition, $(x,w) \in \Gamma_{h\circ(g\circ f)}$ si et seulement s'il existe z tel que $(x,z) \in \Gamma_{g\circ f}$ et $(z,w) \in \Gamma_h$. Cela revient à l'existence de y et z tels que $(x,y) \in \Gamma_f$, $(y,z) \in \Gamma_g$ et $(z,w) \in \Gamma_h$. Par un raisonnement similaire, on obtient que cela équivaut aussi à $(x,w) \in \Gamma_{(h\circ g)\circ f}$. □

1.3.3. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. On a*

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f = \mathrm{Id}_Y \circ f.$$

Démonstration. — On démontre d'abord la première égalité. Soit $(x,y) \in X \times Y$. Par définition, $(x,y) \in \Gamma_{\mathrm{Id}_X \circ f}$ si et seulement s'il existe x' tel que $(x,x') \in \Delta_X$ et $(x',y) \in \Gamma_f$, c'est-à-dire $x = x'$ et $(x,y) \in \Gamma_f$. Donc $\Gamma_f = \Gamma_{\mathrm{Id}_X \circ f}$.

Si on applique la première égalité à f^{-1}, par passage aux correspondances réciproques, on obtient

$$\mathrm{Id}_Y \circ f = ((\mathrm{Id}_Y \circ f)^{-1})^{-1} = (f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y^{-1})^{-1} = (f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y)^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f.$$

□

1.3.4. Proposition. — *Soient f et g des correspondances.*

(1) *Si $A \subseteq \mathrm{Dep}(f)$, alors $(g \circ f)(A) = g(f(A) \cap \mathrm{Dep}(g))$. En particulier,* $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

(2) *Si $B \subseteq \mathrm{Arr}(g)$, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B) \cap \mathrm{Arr}(f))$. En particulier,* $\mathrm{Dom}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Démonstration. — On démontre d'abord (1). Soit $z \in \mathrm{Arr}(g) = \mathrm{Arr}(g \circ f)$. Alors $z \in (g \circ f)(A)$ si et seulement s'il existe $x \in A$ tel que $(x, z) \in \Gamma_{g \circ f}$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ et y tels que $(x, y) \in \Gamma_f$ et $(y, z) \in \Gamma_g$. Cela signifie $y \in f(A) \cap \mathrm{Dep}(g)$ et $z \in g(f(A) \cap \mathrm{Dep}(g))$. Réciproquement, si $z \in g(f(A) \cap \mathrm{Dep}(g))$, alors il existe $y \in f(A) \cap \mathrm{Dep}(g)$ tel que $(y, z) \in \Gamma_g$. Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $(x, y) \in \Gamma_f$. Cela montre que $(x, z) \in \Gamma_{g \circ f}$, et donc $z \in (g \circ f)(A)$. Ainsi on obtient l'égalité $(g \circ f)(A) = g(f(A) \cap \mathrm{Dep}(g))$. Si on applique cette égalité à $A = \mathrm{Dep}(f)$, on obtient

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(\mathrm{Dep}(f)) = g(f(\mathrm{Dep}(f)) \cap \mathrm{Dep}(g)) \subseteq g(\mathrm{Dep}(g)) = \mathrm{Im}(g).$$

Si on applique (1) à g^{-1} et f^{-1}, on obtient (2). □

1.4. Surjectivité

1.4.1. Définition. — Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. Si $\mathrm{Im}(f) = Y$, on dit que f est *surjective*. Si f^{-1} est surjective, c'est-à-dire $\mathrm{Dom}(f) = X$, on dit que f est une *multi-application*.

1.4.2. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance.*

(1) *On suppose que f est surjective. Pour tout $B \subseteq Y$, on a $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.*

(2) *On suppose que f est une multi-application. Pour tout $A \subseteq X$, on a $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $(x, y) \in \Gamma_f$. Cela montre que $x \in f^{-1}(B)$, et donc $y \in f(f^{-1}(B))$.
Si on applique (1) à f^{-1}, on obtient (2). □

1.4.3. Proposition. — *Soient f et g des correspondances.*

(1) *Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.*

(2) *Si $g \circ f$ est une multi-application, alors f l'est aussi.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit $z \in \mathrm{Arr}(g)$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in \mathrm{Dep}(f)$ tel que $(x, z) \in \Gamma_{g \circ f}$. Il existe donc $y \in \mathrm{Arr}(f) \cap \mathrm{Dep}(g)$ tel que $(x, y) \in \Gamma_f$ et $(y, z) \in \Gamma_g$. Cela montre que $z \in \mathrm{Im}(g)$.
Si on applique (1) à g^{-1} et f^{-1}, on obtient (2). □

1.4.4. Proposition. — *Soient f et g des correspondances.*

(1) *On suppose que f et g sont surjectives, et le domaine de définition de g est contenu dans l'ensemble d'arrivée de f, alors $g \circ f$ est surjective.*

(2) *On suppose que f et g sont des multi-applications, et l'image de f est contenu dans l'espace de départ de g, alors $g \circ f$ est une multi-fonction.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit $z \in \mathrm{Arr}(g \circ f) = \mathrm{Arr}(g)$. Comme g est surjective, il existe $y \in \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathrm{Arr}(f)$ tel que $(y,z) \in \Gamma_g$. Comme f est surjective et $y \in \mathrm{Arr}(f)$, il existe $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tel que $(x,y) \in \Gamma_f$. Cela montre que $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Si on applique (1) à g^{-1} et f^{-1}, on obtient (2). $\square$

1.4.1. Injectivité. —

1.4.5. Définition. — Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. Si $(x,y) \in \Gamma_f$, on dit que y est une *image* de x par f et que x est un *antécédent* de y par f. Si tout élément $x \in X$ admet au plus une image par f, on dit que f est une *fonction*. Si tout élément $y \in Y$ admet au plus un antécédent par f, c'est-à-dire f^{-1} est une fonction, on dit que f est *injective*.

1.4.6. Notation. — *Soit f une fonction. Pour tout $x \in \mathrm{Dom}(f)$, on désigne par $f(x)$ l'unique image de x par f.*

1.4.7. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance.*

(1) *On suppose que f est injective. Pour tout $A \subseteq X$, on a $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.*

(2) *On suppose que f est une fonction. Pour tout $B \subseteq Y$, on a $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition il existe $x' \in A$ et $y \in X$ tels que $(x', y) \in \Gamma_f$ et $(x,y) \in \Gamma_f$. Comme y admet au plus un antécédent, on a $x = x'$, et donc $x \in A$.

Si on applique (1) à f^{-1}, on obtient (2). $\square$

1.4.8. Proposition. — *Soient f et g des correspondances.*

(1) *Si f et g sont des fonctions, alors $g \circ f$ l'est aussi. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

(2) *On suppose que f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$. Soient z et z' des images de x par $g \circ f$, et y et y' des éléments tels que

$$(x,y) \in \Gamma_f, \quad (x,y') \in \Gamma_f, \quad (y,z) \in \Gamma_g, \quad (y',z') \in \Gamma_g$$

Comme f est une fonction, on a $y = y' = f(x)$, et donc, par l'hypothèse que g est une fonction, on en déduit $z = z' = g(f(y))$. Donc $g \circ f$ est une fonction et $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$.

Si on applique (1) à g^{-1} et f^{-1}, on obtient (2). $\square$

1.4.9. Proposition. — *Soient f et g des correspondances.*

(1) *On suppose que $g \circ f$ est injective, et que l'image de f est contenue dans le domaine de définition de g, alors f est injective.*

(2) *On suppose que $g \circ f$ est une fonction, et que le domaine de définition de g est contenu dans l'image de f, alors g est une fonction.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soient $y \in \mathrm{Im}(f)$, et x et x' des antécédents de y par f. Comme $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, on obtient $y \in \mathrm{Dom}(g)$. Donc il existe $z \in \mathrm{Arr}(g)$tel que $(y,z) \in \Gamma_g$. Ainsi (x,z) et (x',z) sont des éléments de $\Gamma_{g\circ f}$. Comme $g \circ f$ est injective, on a $x = x'$. Cela montre que f est injective.

Si on applique (1) à g^{-1} et f^{-1}, on obtient (2). $\square$

1.4.10. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance.*

(1) *On suppose que f est une fonction. Pour toute famille non vide $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a*
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

(2) *On suppose que f est injective. Pour toute famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X, on a*
$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit x un élément de $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Pour tout $i \in I$, on a $f(x) \in B_i$, c'est-à-dire $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Donc $x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Cela montre $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Par la proposition 1.2.3, on obtient l'égalité souhaitée.

Si on applique (1) à f^{-1}, on obtient (2). $\square$

1.4.2. Applications. —

1.4.11. Définition. — Soit f une correspondance. Si f est une fonction et si son domaine de définition coïncide avec son ensemble de départ, on dit que f est une *application*. Par définition, f est une application si et seulement si f^{-1} est injective à la fois surjective.

1.4.12. Notation. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. On désigne par $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ la condition que f est une application de X dans Y.*

1.4.13. Remarque. — Soient I et X des ensembles. Si $f : I \to X$ est une application de I dans X, comme tout élément $i \in I$ admet une et une seule image $f(i)$ par f, l'application f détermine une famille $(f(i))_{i\in I}$ d'éléments de X paramétrée par I. Réciproquement, étant donnée une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de X, il existe une unique application de I dans X, par laquelle l'image de chaque $i \in I$ est x_i. Ainsi on établit un lien entre les applications de I dans X et les familles d'éléments de X paramétrées par I.

1.4.14. Exemple. — Soit X un ensemble. La correspondance d'identité Id_X est une application. Elle est injective et surjective. On l'appelle aussi *application d'identité* de X.

1.4.15. Remarque. — Soit $f : X \to Y$ une application.

(1) D'après la proposition 1.2.3, si $(A_i)_{\in I}$ est une famille de parties de X, alors
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i);$$
si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de Y, alors
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$
Dans le cas où $I = \varnothing$, ces égalités sont encore vraies : on a $f(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

(2) Soit I un ensemble non vide. Comme f est une fonction, d'après les proposition 1.2.3 et 1.4.10, si $(A_i)_{\in I}$ est une famille de parties de X, alors
$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i);$$
si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de Y, alors
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

(3) Comme f est une fonction, d'après la proposition 1.4.7, pour tout $B \subseteq Y$, on a $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Comme f^{-1} est injective et surjective, d'après les proposition 1.4.7 et 1.4.2, pour tout $A \subseteq X$, on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

1.4.16. Proposition. — *Soient f et g des applications. Si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, alors $g \circ f$ l'est aussi. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathrm{Dep}(f) = \mathrm{Dep}(g \circ f)$, on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 1.4.8 et 1.4.4. □

1.4.17. Remarque. — Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications.

(1) D'après la proposition 1.4.4, si f et g sont surjective, alors $g \circ f$ l'est aussi ; d'après la proposition 1.4.3, si $g \circ f$ est surjective, alors g est aussi surjective.

(2) D'après la proposition 1.4.8, si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi ; d'après la proposition 1.4.9, si $g \circ f$ est injective, alors f est aussi injective.

1.5. Bijections

1.5.1. Définition. — Soit f une correspondance. Si f est une application injective et surjective (c'est-à-dire f est à la fois une fonction et une multi-application, et en même temps est injective et surjective), on dit que f est une *bijection*, ou encore une *application biunivoque*. Par définition, f est une bijection si et seulement si f^{-1} l'est.

1.5.2. Proposition. — *Soit $f = (X, Y, \Gamma_f)$ une correspondance. On suppose qu'il existe une correspondance de Y dans X, telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, alors f est une bijection et $g = f^{-1}$. Réciproquement, si f est une bijection, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$.*

Démonstration. — Comme la correspondance d'identité est surjective, par la proposition 1.4.3 et l'égalité $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, on obtient que g et surjective et que le domaine de définition de f s'identifie à X. En particulier, l'image de g est égale au domaine de définition de f. Similairement, par la proposition 1.4.3 et l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, on obtient que f et surjective et le domaine de définition de g est égal à Y.

Comme toute correspondance d'identité est une application injective, par la proposition 1.4.9 et l'égalité $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, on obtient que f est injective. Similairement, comme le domaine de définition de f et l'image de g sont égaux à X, par la proposition 1.4.9 et l'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, on obtient que f est une fonction. Donc f est en fait une bijection.

D'après la proposition 1.4.16, si f est une bijection, alors

$$\forall\, x \in X, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,$$
$$\forall\, y \in Y, \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Cela montre que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Enfin, si g est une correspondance de Y dans X, telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, d'après les propositions 1.3.3 et 1.3.2, on obtient

$$g = g \circ \mathrm{Id}_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

□

1.5.3. Proposition. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Si f et g sont des bijections, alors $g \circ f$ l'est aussi.*

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 1.4.4 et 1.4.8. □

1.5.1. Restriction et prolongement. —

1.5.4. Définition. — Soient f et g des correspondances. Si $\Gamma_f \subseteq \Gamma_g$, on dit que f est une *restriction* de g, et que g est un *prolongement* de f. Par définition, f est une restriction de g si et seulement si f^{-1} est une restriction de g^{-1}.

Soient $h = (X, Y, \Gamma_h)$ une correspondance et $A \subseteq X$. On désigne par $h|_A$ la correspondance de A dans Y telle que

$$\Gamma_{h|_A} = \Gamma_h \cap (A \times Y).$$

On l'appelle *restriction de h à A*.

1.5.5. Proposition. — *Soit g une correspondance.*

(1) *Si g est une fonction, alors toute restriction de g est une fonction.*

(2) *Si g est injective, toute restriction de g est injective.*

(3) *Si g est une application et A est une partie de* $\mathrm{Dom}(g)$, *alors $g|_A$ est une application.*

Démonstration. — Montrons d'abord (1). Soit f une restriction de g. Alors $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Pour tout $x \in \mathrm{Dom}(f)$, si $(x, y) \in \Gamma_f$, alors $(x, y) \in \Gamma_g$. Comme g est une fonction, x admet au plus une image par g, cela montre que x admet au plus une image par f. Donc f est une fonction.

Si on applique (1) à g^{-1}, on obtient (2).

Montrons maintenant (3). Par (1) on obtient que $g|_A$ est une fonction. Par ailleurs,

$$\forall\, x \in A, \quad (x, g(x)) \in (A \times \mathrm{Arr}(g)) \cap \Gamma_g = \Gamma_{g|_A}.$$

Cela montre que $x \in \mathrm{Dom}(g|_A)$. Donc $g|_A$ est une application. □

1.5.6. Exemple. — Soient X un ensemble, $A \subseteq X$. La restriction de Id_X à A est appelé *application d'inclusion de A dans X*, notée $\iota_A : A \to X$.

1.6. Exercices

1.6.1. Exercice. — Soit f la correspondance de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'image est le cercle unité.

(1) Déterminer le domaine de définition et l'image de f.

(2) La correspondance f est-t-elle injective ? surjective ?

(3) Déterminer la correspondance réciproque f^{-1}.

(4) Déterminer la composée $f \circ f$.

(5) Déterminer l'image réciproque et l'image directe de $[0, 1]$ par f.

1.6.2. Exercice. — Soit $f : X \to Y$ une application injective. On suppose que X est non vide et on fixe un élément $x_0 \in X$. Soit $g : Y \to X$ l'application définie comme suit :

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{si } y \in \mathrm{Im}(f), \\ x_0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Expliquer pourquoi l'application g est bien définie.

(2) Déterminer l'application composée $g \circ f$.

(3) Montrer que l'application g est surjective.

1.6.3. Exercice. — Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application surjective de X dans Y. Montrer qu'il existe une application injective de Y dans X.

***1.6.4. Exercice* (Théorème de Cantor).** — Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

(1) Montrer qu'il existe au moins une application injective de X dans $\mathscr{P}(X)$.

(2) Soit $f : X \to \mathscr{P}(X)$ une application. En considérant l'ensemble
$$\{x \in X \,:\, x \notin f(x)\},$$
montrer que f n'est pas surjective.

(3) Soit $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$. Montrer que l'application de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0,1\}^X$ qui envoie $A \subseteq X$ sur
$$\mathbb{1}_A : X \to \{0,1\}, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$
est une bijection.

1.6.5. Exercice. — On considère l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par
$$f(x,y) = y + \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1).$$

(1) Montrer que f est une bijection.

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$, il existe une bijection entre $\mathbb{N}^n$ et $\mathbb{N}$.

(3) Est-ce qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}$, où $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans lui-même ?

***1.6.6. Exercice* (Théorème de Cantor-Bernstein).** — Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.

(1) Pour toute partie A de X, soit
$$G(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$
Montrer que, si A et B sont des parties de X telles que $A \subseteq B$, alors on a $G(A) \subseteq G(B)$.

(2) Soit $S = \{A \subseteq X \,:\, G(A) \subseteq A\}$ et $X_0 = \bigcap_{A \in S} A$ (par convention $X_0 = X$ lorsque $S = \varnothing$).

  (i) Montrer que $X_0 \in S$.

  (ii) Montrer que $G(X_0) \in S$.

  (iii) En déduire que $G(X_0) = X_0$.

(3) Soit $h : X \to Y$ l'application définie par
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_0 \\ g^{-1}(x), & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$
Montrer que cette application est bien définie et est une bijection.

(4) Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une application injective et une application surjective de E dans F. Montrer qu'il existe une bijection entre E et F.

1.6.7. Exercice. — On dit qu'un ensemble X est dénombrable s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et X.

(1) Montrer que les ensembles suivants sont dénombrable : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
(2) Construire une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
(3) En utilisant le théorème de Cantor-Bernstein, montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
(4) Montrer que l'application de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie $A \subseteq \mathbb{N}$ sur
$$\sum_{a \in A} \frac{1}{10^a}$$
est bien définie et est injective.
(5) En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
(6) Montrer que, si $(X_i)_{i=1}^n$ est une famille finie d'ensembles dénombrables, alors le produit direct $X_1 \times \cdots \times X_n$ est dénombrable.
(7) Montrer que, si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles dénombrables paramétrée par $\mathbb{N}$, alors la réunion $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ est dénombrable.
(8) Soit $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.