CHAPITRE 2

RELATION D'ORDRE

2.1. Relation binaire

2.1.1. Définition. — Soit X un ensemble. On appelle *relation binaire* sur X toute correspondance de X vers lui-même. Si R est une relation binaire sur X, pour tout $(x, y) \in X \times X$, on désigne par xRx l'énoncé $(x, y) \in \Gamma_R$, et par $x \not R\, y$ l'énoncé $(x, y) \notin \Gamma_R$.

Si Y est une partie de X, alors il existe une unique relation binaire sur Y dont le graphe est $\Gamma_R \cap (Y \times Y)$. On l'appelle restriction de R à Y (en tant que relation binaire).

2.1.2. Définition. — Soient X un ensemble, R une relation binaire sur X.

(1) Si $\Delta_X \subseteq \Gamma_R$, c'est-à-dire
$$\forall\, x \in \Omega, \quad xRx,$$
on dit que R est *réflexive.*

(2) Si $R = R^{-1}$, c'est-à-dire
$$\forall\, (x, y) \in X \times X, \quad xRy \text{ implique } yRx,$$
on dit que R est *symétrique.*

(3) Si $\Gamma_R \cap \Gamma_{R^{-1}} \subseteq \Delta_X$, c'est-à-dire
$$\forall\, (x, y) \in X \times X, \quad (xRy \text{ et } yRx) \text{ implique } x = y,$$
on dit que R est *antisymétrique.*

(4) Si $\Gamma_{R \circ R} \subseteq \Gamma_R$, c'est-à-dire
$$\forall\, (x, y, z) \in X \times X \times X, \quad (xRy \text{ et } yRz) \text{ implique } xRz,$$
on dit que R est *transitive.*

On voit aussitôt que, si R est réflexive (resp. symétrique, antisymétrique, transitive), alors R^{-1} l'est aussi.

2.1.3. Notation. — On utilise souvent le symbole en symétrie axiale pour désigner la réciproque d'une relation binaire. Par exemple, si $\leqslant$ désigne une relation binaire, alors $\geqslant$ désigne sa relation binaire réciproque. On a

$$x \geqslant y \text{ si et seulement si } y \leqslant x.$$

2.2. Relation d'ordre

2.2.1. Définition. — Soient X un ensemble et $\leqslant$ une relation binaire sur X. Si $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive, on dit que $\leqslant$ est une *relation d'ordre* sur X et que $(X, \leqslant)$ est un *ensemble ordonné*. Il s'avère que, si $\leqslant$ est une relation d'ordre, alors sa relation réciproque l'est aussi. Par ailleurs, la restriction d'une relation d'ordre à une partie de X est aussi une relation d'ordre.

Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Si, pour tout $(x, y) \in X \times X$, on a

$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x,$$

alors on dit que $\leqslant$ est une *relation d'ordre totale* et $(X, \leqslant)$ est un ensemble *totalement ordonné*.

2.2.2. Exemple. — Soit $\mathcal{E}$ une collection d'ensembles. Alors la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

2.2.3. Notation. — Sauf mention au contraire, on utilise souvent $\leqslant$ pour désigne une relation d'ordre, et on désigne par $<$ la relation binaire définie comme suit :

$$x < y \text{ si et seulement si } (x \leqslant y \text{ et } x \neq y).$$

2.2.4. Proposition. — *Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $y \notin X$, $Y = X \cup \{y\}$. On étend la relation d'ordre $\leqslant$ sur Y de sorte que $x \leqslant y$ quel que soit $x \in Y$ et que $y \nleqslant x$ pour tout $x \in X$. Alors la relation binaire étendue est une relation d'ordre.*

Démonstration. — Par définition, $\leqslant$ est réflexive sur Y.

Soient a et b deux éléments de Y tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$. Si a et b appartiennent à X, alors par l'antisymétrie de $\leqslant$ sur X, on obtient $a = b$. Si $\{a, b\} \nsubseteq X$, par la condition

$$\forall\, x \in X, \quad y \nleqslant x$$

on obtient $a = b = y$. Donc $\leqslant$ est antisymétrique sur Y.

Soient a, b et c trois éléments de Y tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Si $c = y$, par définition on a $a \leqslant c$; si $c \neq y$, alors par la condition

$$\forall\, x \in X, \quad y \nleqslant x$$

on obtient $b \in X$ puis $a \in X$. Donc par la transitivité de $\leqslant$ sur X on obtient $a \leqslant c$. Cela montre que $\leqslant$ est également transitive sur Y. □

2.2.5. Remarque. — On peut aussi appliqué la proposition précédente à la relation d'ordre réciproque $\geqslant$ pour étendre la relation d'ordre $\leqslant$ sur Y de sorte que $y < x$ quel que soit $x \in X$.

2.3. Applications monotones

2.3.1. Définition. — Soient I et X deux ensembles ordonnés, f une fonction de I dans X.

(1) Si, pour tout $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)^2$, $a < b$ implique $f(a) \leqslant f(b)$, on dit que f est *croissante* ;

(2) Si, pour tout $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)^2$, $a < b$ implique $f(a) < f(b)$, on dit que f est *strictement croissante* ;

(3) Si, pour tout $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)^2$, $a < b$ implique $f(a) \geqslant f(b)$, on dit que f est *décroissante* ;

(4) Si, pour tout $(a,b) \in \mathrm{Dom}(f)^2$, $a < b$ implique $f(a) > f(b)$, on dit que f est *strictement décroissante.*

Si la fonction f est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est *monotone* ; si la fonction f est strictement croissante ou strictement décroissante, on dit que f est *strictement monotone.*

Si on remplace l'une des relations d'ordre de I et X par sa réciproque, alors la monotonicité (stricte) d'une fonction est préservée tandis que le sens de monotonicité est inversé. Si on remplace les deux relations d'ordre de I et Y par leurs réciproques, alors alors la monotonicité (stricte) d'une fonction est préservée dans le même sens.

2.3.2. Exemple. — Soit X un ensemble ordonné. L'application d'identité de X dans lui-même est strictement croissante.

2.3.3. Proposition. — *Soient f et g deux fonctions.*

(1) *Si f et g sont en même temps croissante, ou en même temps décroissante, alors $g \circ f$ est croissante.*

(2) *Si f et g sont en même temps strictement croissante, ou en même temps strictement décroissante, alors $g \circ f$ est strictement croissante.*

(3) *Si l'une entre f et g est croissante et l'autre est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.*

(4) *Si l'une entre f et g est strictement croissante et l'autre est strictement décroissante, alors $g \circ f$ est strictement décroissante.*

Démonstration. — Soient x et y deux éléments du domaine de définition de $g \circ f$. On suppose par exemple que f et g sont croissantes. Comme f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(y)$. Comme g est croissante, on en déduit $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$. Donc $g \circ f$ est croissante. $\square$

2.3.4. Proposition. — *Soient I et X deux ensembles ordonnés, f une fonction de I dans X.*

(1) *Si f est croissante (resp. décroissante) et injective, alors elle est strictement croissante (décroissante).*

(2) *On suppose que I est un ensemble totalement ordonné. Si f est une fonction strictement monotone, alors elle est injective.*

Démonstration. — (1) On suppose que f est injective. Soient a et b deux éléments de $\mathrm{Dom}(f)$ tels que $a < b$. Comme f est croissante, on a $f(a) \leqslant f(b)$. Comme f est injective, on obtient $f(a) \neq f(b)$. Donc $f(a) < f(b)$.

(2) Soient a et b deux éléments distincts de $\mathrm{Dom}(f)$. Comme I est totalement ordonné, ou bien $a < b$, ou bien $b < a$. Comme f est strictement monotone, on en déduit que, ou bien $f(a) < f(b)$, ou bien $f(b) < f(a)$. Donc f est injective. □

2.3.5. Proposition. — *Soient A un ensemble totalement ordonné, B un ensemble ordonné, f une fonction injective de A vers B. Si f est croissante (resp. décroissante), alors il en est de même de la fonction réciproque f^{-1}.*

Démonstration. — On suppose que f est croissante. Soient a et b deux éléments de l'image de f (qui s'identifie au domaine de définition de f^{-1}) tel que $a < b$. Ainsi $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ sont deux éléments différent de A (car f est injective). Comme A est totalement ordonné, ou bien $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, ou bien $f^{-1}(b) < f^{-1}(a)$. Comme f est croissante et injective, elle est strictement croissante. Si $f^{-1}(b) < f^{-1}(a)$, alors

$$b = f(f^{-1}(b))) < f(f^{-1}(a)) = a.$$

Cela contredit l'hypothèse $a < b$. On en déduit $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. Donc la fonction f^{-1} est croissante. □

2.3.6. Définition. — Soient X et Y deux ensembles ordonnés, $f : X \to Y$ une bijection. Si f et f^{-1} sont toutes croissantes, on dit que f est un *isomorphisme* d'ensembles ordonnés. La proposition 2.3.5 montre que, dans le cas où X est totalement ordonné, si f est une bijection croissante, alors elle est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

S'il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre X et Y, on dit qu'il sont *isomorphes*.

2.4. Bornes

2.4.1. Définition. — Soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie de X.

(1) Soit $M \in X$. Si, pour tout $x \in A$, on a $x \leqslant M$, on dit que M est un *majorant* de A (par rapport à $\leqslant$). Si A admet un majorant dans X, on dit que A est *borné supérieurement* dans X.

(2) Soit $m \in X$. Si, pour tout $x \in A$, on a $m \leqslant x$, on dit que m est un *minorant* de A (par rapport à $\leqslant$). Si A admet un minorant dans X, on dit qu'il est *borné inférieurement* dans X.

(3) Si un élément de A est un majorant de A, on dit qu'il est le *plus grand élément* de A, noté $\max_{\leqslant} A$ (ou simplement $\max A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\leqslant$). L'ensemble A admet un plus grand élément si et seulement s'il est borné supérieurement dans lui-même.

(4) Si un élément de A est un minorant de A, on dit qu'il est le *plus petit élément* de A, noté $\min_{\leqslant} A$ (ou simplement $\min A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\leqslant$). L'ensemble A admet un plus petit élément si et seulement s'il est borné inférieurement dans lui-même.

(5) Si l'ensemble des majorant de A dans X admet un plus petit élément, on dit que A admet une *borne supérieure* dans $(X, \leqslant)$ et on désigne par $\sup_{(X,\leqslant)} A$ (ou simplement par $\sup A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $(X, \leqslant)$) le plus petit majorant de A dans X.

(6) Si l'ensemble des minorant de A dans X admet un plus grand élément, on dit que A admet une *borne inférieure* dans $(X, \leqslant)$ et on désigne par $\inf_{(X,\leqslant)} A$ (ou simplement par $\inf A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $(X, \leqslant)$) le plus grand minorant de A dans X.

2.4.2. Notation. — Soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et I un ensemble.

(1) Si f est une fonction de I dans X, on désigne par $\max f$ (resp. $\min f$, $\sup f$, $\inf f$) le plus grand élément (resp. le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure) de l'image de f.

(2) Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de X paramétrée par I, on désigne par

$$\max_{i\in I} x_i, \quad (\text{resp. } \min_{i\in I} x_i, \quad \sup_{i\in I} x_i, \quad \inf_{i\in I} x_i)$$

le plus grand élément (resp. le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure) de l'ensemble $\{x_i \,:\, i \in I\}$.

2.4.3. Proposition. — *Soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et A une partie de X. Si A admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), alors* $\max A$ *est aussi la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A dans $(X, \leqslant)$.*

Démonstration. — Par définition $\max A$ est un majorant de A. Si M est un majorant de A, comme $\max A \in A$, on obtient $M \geqslant \max A$. Donc $\max A$ est le plus petit majorant de A dans $(X, \leqslant)$, c'est-à-dire $\max A = \sup A$. □

2.4.4. Proposition. — *soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné, Y et A deux parties de X telles que $A \subseteq Y$. On suppose que la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A dans X existe et que* $\sup_{(X,\leqslant)} A$ *(resp.* $\inf_{(X,\leqslant)} A$*) appartient à Y. Alors* $\sup_{(X,\leqslant)} A$ *(resp.* $\inf_{(X,\leqslant)} A$*) est aussi la borne supérieure (resp. borne inférieure) de A dans Y.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{M}_X(A)$ et $\mathscr{M}_Y(A)$ l'ensemble des majorants de A dans X et celui des majorants de A dans Y, respectivement. Par définition, on a $\mathscr{M}_Y(A) \subseteq \mathscr{M}_X(A)$. Comme $\sup_{(X,\leqslant)} A$ est le plus petit élément de $\mathscr{M}_X(A)$ qui appartient à $\mathscr{M}_Y(A)$ (par l'hypothèse de la proposition), il est également le plus petit élément de $\mathscr{M}_Y(A)$, d'où $\sup_{(X,\leqslant)} A = \sup_{(Y,\leqslant)} A$. □

2.4.5. Proposition. — *Soient $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné, A et B des parties de X telle que $A \subseteq B$. On suppose que A et B ont toutes des bornes supérieures (resp. bornes inférieures) dans $(X, \leqslant)$, alors on a* $\sup A \leqslant \sup B$ *(resp.* $\inf B \leqslant \inf A$*).*

Démonstration. — On suppose que tous les $\sup A$ et $\sup B$ existent. Par définition $\sup B$ est un majorant de B. Comme $A \subseteq B$, $\sup B$ est aussi un majorant de A. Donc $\sup A \leqslant \sup B$.

□

2.5. Exercices

2.5.1. Exercice. — Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $(X, \leqslant)$ est totalement ordonné.

(2) toute partie à 2 éléments de X admet un plus grand élément.

(3) toute partie à 2 éléments de X admet un plus petit élément.

2.5.2. Exercice. — Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné.

(1) Soient A et B deux parties de X. On suppose que A et B admettent chacune un plus grand élément. Montrer que $A \cup B$ admet un plus grand élément.

(2) Montrer que toute partie finie de X admet un plus grand élément.

2.5.3. Exercice. — On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de la relation d'ordre usuelle et on considère le sous-ensemble $A = [0, 1[$ de $\mathbb{R}$.

(1) L'ensemble A admet-t-il un plus grad élément ? un plus petit élément ?

(2) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de A dans $\mathbb{R}$.

(3) L'ensemble A admet-t-il une borne inférieure dans $]-\infty, 1[$? une borne inférieure dans $]-\infty, 1[$?

(4) L'ensemble A admet-t-il une borne supérieure dans $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty]$?

(5) Montrer que l'ensemble A admet une borne supérieure dans $]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$ et déterminer cette borne supérieure.

2.5.4. Exercice. — On dit qu'une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble X est un bon ordre si toute partie non vide de X admet un plus petit élément par rapport à $\leqslant$.

(1) Montrer que, si $\leqslant$ est un bon ordre sur X, alors $(X, \leqslant)$ est totalement ordonné.

(2) On suppose que $\leqslant$ est un bon ordre sur X. Montrer que, pour tout sous-ensemble Y de X, la restriction de $\leqslant$ à Y est un bon ordre.

(3) On suppose que $\leqslant$ est un bon ordre sur X et que $f : X \to X$ est une application strictement croissante. Montrer que, pour tout $x \in X$, on a $x \leqslant f(x)$.

2.5.5. Exercice. — Dans cet exercice, on fixe un ensemble X muni d'un bon ordre $\leqslant$. On appelle *segment initial* de X toute partie S de X qui vérifie la propriété suivante :

pour tout $s \in S$ et tout $x \in X$, si $x < s$ alors $x \in S$.

Si de plus $S \neq X$, on dit que S est un segment initial propre.

(1) Montrer que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $X_{<x} := \{s \in X \mid s < x\}$ est un segment initial propre de X.

(2) Montrer que, pour tout segment initial propre S de X, il existe un $x \in X$ tel que $S = X_{<x}$.

(3) Montrer que, l'application de X dans $\mathscr{P}(X)$ (l'ensemble des parties de X, muni de la relation d'inclusion $\subseteq$), qui envoie $x \in X$ sur $X_{<x}$, est strictement croissante.

(4) Soit $\mathrm{SI}(X)$ l'ensemble des segments initials de X. Montrer que la relation d'inclusion $\subseteq$ est un bon ordre sur $\mathrm{SI}(X)$.

(5) Soient S et T deux segments initiaux de X. Montrer que, si $f : S \to T$ est une bijection croissante, alors $S = T$ et f est l'application d'identité.

2.5.6. Exercice. — Soient X et Y deux ensembles muni de bons ordres. Soit f la correspondance de X vers Y telle que $(x, y) \in \Gamma_f$ si et seulement s'il existe une bijection croissante de $X_{<x}$ dans $Y_{<y}$.

(1) Montrer que f est une fonction.

(2) Montrer que f est strictement croissante.

(3) Montrer que $\mathrm{Dom}(f)$ est un segment initial de X.

(4) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un segment initial de Y.

(5) Montrer que, ou bien $\mathrm{Dom}(f) = X$, ou bien $\mathrm{Im}(f) = Y$.