CHAPITRE 3

DROITE RÉELLE ACHEVÉE

3.1. Corps des nombres réels

3.1.1. Définition. — On désigne par $\mathbb{R}$ un corps muni d'une relation d'ordre $\leqslant$, qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné,

(2) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $a < b$, alors

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad a + c < b + c,$$

(3) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times R$, si $a > 0$ et $b > 0$, alors $ab > 0$,

(4) pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$, si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$, alors il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Le corps ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est appelé *corps des nombres réels*, dont les éléments sont appelés *nombres réels*.

3.1.2. Remarque. — On rappelle quelques propriétés élémentaire du corps réel, dont la démonstration est laissée comme exercice.

(1) Soient a_1, a_2, b_1 et b_2 deux nombres réels tels que $a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 < b_2$, alors $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$.

(2) Si a et b sont deux nombres réels tel que $a > b$, alors on a $-a < -b$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ si et seulement si $-\lambda < 0$.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times R$, si $a > b$, alors

$$\lambda a > \lambda b, \quad (-\lambda)a < (-\lambda)b.$$

(4) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ l'unique morphisme d'anneaux. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $f(n) > 0$. En particulier, f est un morphisme injectif. Ainsi on peut considérer $\mathbb{Z}$ comme un sous-anneau de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps de $\mathbb{R}$.

(5) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$ alors $a^{-1} > 0$; si $a < 0$ alors $a^{-1} < 0$.

(6) Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors M est un majorant de A si et seulement si $-M$ est un minorant de $-A := \{-x : x \in A\}$. Par ailleurs, si A est borné supérieurement, alors on a

$$\sup_{\mathbb{R}} A = -\inf_{\mathbb{R}}(-A)$$

3.2. Droite réel achevé

3.2.1. Proposition. — *Le corps des nombres réels n'a ni plus grand élément ni plus petit élément.*

Démonstration. — On suppose par contradiction que M est le plus grand élément de $\mathbb{R}$. Comme $1 > 0$ on a $M + 1 > M$. Cela conduit à une contradiction. Par le même argument on peut montrer que $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément. □

3.2.2. Définition. — On rajoute deux éléments formels $-\infty$ et $+\infty$ à $\mathbb{R}$ pour former un ensemble ordonné $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a < +\infty.$$

C'est un ensemble totalement ordonné et achevé (d'après la proposition 3.5.12), appelé *droite réelle achevée*.

On étend partiellement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ sur $[-\infty, +\infty]$ de manière suivante :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in\,]-\infty, +\infty, &\quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\\
\forall\, x \in [-\infty, +\infty[, &\quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,\\
\forall\, a \in\,]0, +\infty], &\quad a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty,\\
\forall\, a \in [-\infty, 0[, &\quad a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on définit les valeurs de $-(+\infty)$, $-(-\infty)$, $(+\infty)^{-1}$ et $(-\infty)^{-1}$ comme suit :

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad (+\infty)^{-1} = (-\infty)^{-1} = 0.$$

Attention, ces expressions ne désignent en aucun cas les inverses de $+\infty$ et $-\infty$ par rapport à l'addition et la multiplication. En outre, les expressions suivantes ne sont jamais définies

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (+\infty)0, \quad 0(+\infty), \quad (-\infty)0, \quad 0(-\infty).$$

3.2.3. Notation. — Soit A une partie de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) On désigne par $A + c$ l'ensemble $\{a + c : a \in A\}$.

(2) Si $c \neq 0$, on désigne par cA l'ensemble $\{ca : a \in A\}$. Quand $c = -1$, $(-1)A$ est aussi noté comme $-A$.

3.2.4. Remarque. — Certaines propriétés de $\mathbb{R}$ s'étend naturellement sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(1) Soit $(a,b) \in [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$ tel que $a < b$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ on a $a+c < b+c$.

(2) Pour tout $(a,b) \in [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$, $a < b$ si et seulement si $-a > -b$.

(3) Soit $(a,b) \in [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$ tel que $a < b$. Pour tout $\lambda \in \,]0,+\infty[$, on a

$$\lambda a < \lambda b, \quad (-\lambda)a > (-\lambda)b.$$

(4) Soient $(a,b) \in [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$ et $(x,y) \in [-\infty,+\infty] \times [-\infty,+\infty]$ tels que $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, et que $x+y$ et $a+b$ soit bien définis, alors $x+y \leqslant a+b$.

(5) Si A est une partie de $[-\infty,+\infty]$, alors on a

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

3.2.5. Proposition. — *Soit A une partie de $[-\infty,+\infty]$.*

(1) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\sup(A+c) = \sup(A)+c$, $\inf(A+c) = \inf(A)+c$.*

(2) *Pour tout $\lambda \in \,]0,+\infty[$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$, $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$.*

(3) *Pour tout $\lambda \in \,]-\infty,0[$, $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$, $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.*

Démonstration. — (1) Pour tout $a \in A$, on a $a+c \leqslant \sup(A)+c$, c'est-à-dire que $\sup(A)+c$ est un majorant de $A+c$. Donc $\sup(A+c) \leqslant \sup(A)+c$. Si on applique cette inégalité à $A+c$ et $-c$, on obtient $\sup(A) \leqslant \sup(A+c)-c$. Donc l'égalité $\sup(A+c) = \sup(A)+c$ est vrai. Si on applique cette égalité à $-A$ et $-c$, on obtient $\inf(A+c) = \inf(A)+c$.

(2) Pour tout $a \in A$, on a $\lambda a \leqslant \lambda \sup(A)$, c'est-à-dire que $\lambda \sup(A)$ est un majorant de λA. Donc $\sup(\lambda A) \leqslant \lambda \sup(A)$. Si on l'applique à λA et λ^{-1}, on obtient $\sup(A) \leqslant \lambda^{-1}\sup(\lambda A)$. Donc l'égalité $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ est vrai. Si on applique cette égalité à $-A$ et λ, on obtient $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

(3) est une conséquence de (2). □

3.2.6. Proposition. — *Soient I et J des ensembles non vide, $f : I \to [-\infty,+\infty]$ et $g : J \to [-\infty,+\infty]$ des applications. Alors les égalités suivantes sont vraie, pourvu que le terme à droite de l'égalité est bien défini :*

$$\sup_{\substack{(x,y)\in I\times J\\ \{f(x),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(y)) = \big(\sup_{x\in I} f(x)\big) + \big(\sup_{y\in J} g(y)\big), \tag{3.1}$$

$$\inf_{\substack{(x,y)\in I\times J\\ \{f(x),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(y)) = \big(\inf_{x\in I} f(x)\big) + \big(\inf_{y\in J} g(y)\big), \tag{3.2}$$

Démonstration. — Soient

$$a = \sup_{x\in I} f(x), \quad b = \sup_{y\in J} g(y), \quad c = \sup_{\substack{(x,y)\in I\times J\\ \{f(x),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(y)).$$

Par définition, pour tout $(x, y) \in I \times J$, on a $f(x) \leqslant a$ et $g(y) \leqslant b$. Par la remarque 3.2.4, on obtient que, si $\{f(x), g(y)\} \neq \{-\infty, +\infty\}$, alors

$$f(x) + g(y) \leqslant a + b.$$

Cela montre que $c \leqslant a+b$. En particulier, si a ou b est égal à $-\infty$, on a $c = -\infty = a+b$. On peut donc supposer que $-\infty \notin \{a, b\}$. En particulier, il existe $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$ tels que $f(x_0) > -\infty$ et $g(y_0) > -\infty$. Si $a = +\infty$, dans le cas où $g(y_0) \in \mathbb{R}$, la proposition 3.2.5 conduit à

$$c \geqslant \sup_{x \in I}(f(x) + g(y_0)) = a + g(x_0) = +\infty = a + b;$$

dans le cas où $g(y_0) = +\infty$ on a

$$c \geqslant f(x_0) + g(y_0) = +\infty = a + b.$$

De façon similaire, dans le cas où $b = +\infty$ on a aussi $c = +\infty = a + b$

Dans la suite, on suppose que a et b sont des nombres réels. En particulier, pour tout $(x, y) \in I$ on a $f(x) < +\infty$ et $g(y) < +\infty$. Par définition, pour tout $(x, y) \in I \times J$ tel que $\{f(x), g(y)\} \neq \{-\infty, +\infty\}$, on a $c \geqslant f(x)+g(y)$. Pour $y \in J$ fixé, si $g(y) \in \mathbb{R}$, par la proposition 3.2.5 on obtient $c \geqslant a + g(y)$; si $g(y) = -\infty$, on a $a + g(y) = -\infty \leqslant c$. On obtient ainsi

$$\forall\, y \in J, \quad c \geqslant a + g(y).$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, la proposition 3.2.5 conduit à $c \geqslant a + b$. Si $a = +\infty$, alors $c = +\infty$; si $a = -\infty$ alors $a + b = -\infty$. Donc l'inégalité $c \geqslant a + b$ est encore vraie. On obteint donc l'égalité (3.1). Si on l'applique à $-f$ et $-g$, on obtient (3.2). $\square$

3.2.7. Proposition. — *Soit I un ensemble non vide, f et g deux application de I dans $[-\infty, +\infty]$. Les inégalités suivantes sont vraies, pourvu que le terme à droite de l'inégalité est bien définie :*

$$\sup_{\substack{x \in I \\ \{f(x),g(x)\} \neq \{-\infty,+\infty\}}} (f(x) + g(x)) \leqslant \big(\sup_{x \in I} f(x)\big) + \big(\sup_{x \in I} g(x)\big), \tag{3.3}$$

$$\inf_{\substack{x \in I \\ \{f(x),g(x)\} \neq \{-\infty,+\infty\}}} (f(x) + g(x)) \leqslant \big(\inf_{x \in I} f(x)\big) + \big(\inf_{x \in I} g(x)\big) \tag{3.4}$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des propositions 3.2.6 et 2.4.5 (en considérant $\Delta_I \subseteq I \times I$). $\square$

3.2.8. Proposition. — *Soient $(I, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, $f : I \to [-\infty, +\infty]$ et $g : I \to [-\infty, +\infty]$ des fonctions monotone de même sens de monotonicité. Les égalités suivantes sont vraies, pourvu que le terme à droite de l'égalité* *est bien défini :*

$$\sup_{\substack{x\in I\\ \{f(x),g(x)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(x)) = \big(\sup_{x\in I} f(x)\big) + \big(\sup_{x\in I} g(x)\big), \tag{3.5}$$

$$\inf_{\substack{x\in I\\ \{f(x),g(x)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(x)) = \big(\inf_{x\in I} f(x)\big) + \big(\inf_{x\in I} g(x)\big). \tag{3.6}$$

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose que f et g sont croissantes. Soient

$$a = \sup_{x\in I} f(x), \quad b = \sup_{x\in I} g(x), \quad c = \sup_{\substack{x\in I\\ \{f(x),g(x)\}\neq\{-\infty,+\infty\}}} (f(x)+g(x)).$$

D'après la proposition 3.2.7, on obtient $c \leqslant a+b$.

Soit $(x,y)\in I\times I$ tel que $\{f(x),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}$. Si $x\leqslant y$ et $\{f(y),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}$, par la croissance de f on obtient

$$f(x)+g(y)\leqslant f(y)+g(y)\leqslant c.$$

Si $\{f(y),g(y)\}=\{-\infty,+\infty\}$, l'inégalité $f(x)+g(y)\leqslant c$ est encore vraie : dans le cas où $f(y)=-\infty$, on a $f(x)=-\infty$ car $f(x)\leqslant f(y)$, cela contredit $\{f(x),g(y)\}\neq\{-\infty,+\infty\}$; dans le cas où $g(y)=-\infty$, on a $f(x)+g(y)=-\infty\leqslant c$. Similairement, dans le cas où $y\leqslant x$, on a aussi $f(x)+g(y)\leqslant c$. D'après la proposition 3.2.6, on obtient $a+b\leqslant c$. Ainsi l'égalité (3.5) est vraie. Si on l'applique à $-f$ et $-g$, on obtient (3.6). □

3.3. Limites supérieure et inférieure

3.3.1. Définition. — Soient I un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, et X un ensemble. On appelle *suite* d'éléments de X paramétrée par I toute application de I dans X. On peut aussi considérer une suite comme une famille d'éléments de X paramétrée par I. On désigne par X^I l'ensemble des suites d'éléments de X paramétrées par I. Si J est une partie infinie de I et si $u: I\to X$ est une suite, la restriction de u à J est appelée une *sous-suite* de u.

3.3.2. Lemme. — *Soient I un ensemble totalement ordonné, X un ensemble ordonné $f: I\to X$ une application, J une partie de I. On suppose que J ne possède pas de majorant dans I.*

(1) *Si f est croissante, alors $f(I)$ et $f(J)$ ont les même majorants dans X.*

(2) *Si f est décroissante, alors $f(I)$ et $f(J)$ ont les même minorants dans X.*

Démonstration. — (1) Comme $f(J)\subseteq f(I)$, tout majorant de $f(I)$ est un majorant de $f(J)$. Réciproquement, supposons que M est un majorant de $f(J)$. Soit $x\in I$. Comme I est totalement ordonné et J n'a pas de majorant dans I, il existe $y\in J$ tel que $x < y$. Comme f est croissante, on obtient $f(x) \leqslant f(y) \leqslant M$. Donc M est aussi un majorant de $f(I)$.

Si on remplace la relation d'ordre de X par sa réciproque, on déduit (2) de (1). $\square$

Dans le reste du paragraphe, on fixe un sous-ensemble infini I de $\mathbb{N}$.

3.3.3. Définition. — Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans $[-\infty,+\infty]^I$. On définit ses *limite supérieure* et *limite inférieure* comme

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{n\in I\\ n\geqslant N}} x_n, \qquad \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{n\in I\\ n\geqslant N}} x_n.$$

D'après la proposition 2.4.5, la suite

$$\sup_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n, \quad N\in\mathbb{N}$$

est décroissante, et la suite

$$\inf_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n, \quad N\in\mathbb{N}$$

est croissante. En particulier, d'après le lemme 3.3.2, pour toute partie infinie J de $\mathbb{N}$, on a

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \inf_{N\in J} \sup_{\substack{n\in I\\ n\geqslant N}} x_n, \qquad \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \sup_{N\in J} \inf_{\substack{n\in I\\ n\geqslant N}} x_n. \tag{3.7}$$

On en déduit que, si on modifie un nombre fini de termes dans la suite $(x_n)_{n\in I}$, alors ses limites inférieure et supérieure restent invariantes. En outre, pour tout $N\in I$ on a

$$\inf_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n \leqslant x_N \leqslant \sup_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n.$$

3.3.4. Exemple. — Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de $[-\infty,+\infty]$, $a\in[-\infty,+\infty]$. On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout élément $n\in I$ qui est supérieur ou égal à n_0, on ait $x_n = a$, alors

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = a.$$

3.3.5. Proposition. — *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de $[-\infty,+\infty]$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

(1) *Si $\lambda > 0$, alors*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n, \qquad \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n.$$

(2) *Si $\lambda < 0$, alors*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n, \qquad \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 3.2.5. $\square$

3.3.6. Proposition. — *Soient* $(x_n)_{n\in I}$ *et* $(y_n)_{n\in I}$ *deux suites d'éléments de la droite réelle achevée. On suppose qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \in I$ *satisfaisant* $n \geqslant n_0$*, on a* $x_n \leqslant y_n$*, alors*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n, \qquad \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n.$$

Démonstration. — C'est une consequence de (3.7) et de la proposition 3.5.9. □

3.3.7. Proposition. — *Soient* $(x_n)_{n\in I}$ *et* $(y_n)_{n\in I}$ *deux suite d'éléments de* $[-\infty, +\infty]$*, telles que, pour tout* $n \in I$ *on a* $\{x_n, y_n\} \neq \{-\infty, +\infty\}$*. Alors les inégalités suivantes sont vraies pourvu que le terme à droite de l'inégalité est bien défini :*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} (x_n + y_n) \leqslant \Big(\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n\Big) + \Big(\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big), \tag{3.8}$$

$$\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} (x_n + y_n) \geqslant \Big(\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n\Big) + \Big(\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big) \tag{3.9}$$

Démonstration. — Soient

$$a = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n, \quad b = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n, \quad c = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} (x_n + y_n)$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soient

$$A_N = \sup_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n, \quad B_N = \sup_{n\in I,\, n\geqslant N} y_n.$$

S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A_N = -\infty$, alors pour tout $n \in I$, $n \geqslant N$ on a $x_n = -\infty$, et $a = -\infty$. Cela montre que, pour tout $n \in I$, $n \geqslant N$, on a $x_n + y_n = -\infty$. Donc $c = -\infty = a + b$. Similairement, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B_N = -\infty$, alors l'inégalité $c = -\infty = a + b$ est encore vraie.

On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $A_N > -\infty$ et $B_N > -\infty$. D'après la proposition 3.2.8, on a

$$\inf_{N\in\mathbb{N}} (A_N + B_N) = a + b.$$

Rappelons que, pour tout $n \in I$, si $n \geqslant N$, alors

$$x_n + y_n \leqslant A_N + B_N.$$

Ainsi

$$\sup_{n\in I,\, n\geqslant N} (x_n + y_n) \leqslant A_N + B_N.$$

En prenant la borne inférieure quand N parcourt $\mathbb{N}$, par la proposition 3.5.9 on obtient l'inégalité (3.8). En l'appliquant aux suites $(-x_n)_{n\in I}$ et $(-y_n)_{n\in I}$, par la proposition 3.3.5 on obtient (3.9).

□

3.3.8. Proposition. — *Soient* $(x_n)_{n\in I}$ *et* $(y_n)_{n\in I}$ *deux suites d'éléments de* $[-\infty,+\infty]$*, telle que, pour tout* $n \in I$ *on ait* $\{x_n, y_n\} \neq \{-\infty,+\infty\}$*. Alors les inégalités suivantes sont vraies, pourvu que le terme à droite de l'égalité est bien défini :*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty}(x_n+y_n) \geqslant \Big(\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n\Big) + \Big(\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big), \tag{3.10}$$

$$\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty}(x_n+y_n) \leqslant \Big(\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n\Big) + \Big(\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big). \tag{3.11}$$

Démonstration. — Soient

$$a = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n, \quad b = \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n, \quad c = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty}(x_n+y_n)$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soient

$$A_N = \sup_{n\in I,\, n\geqslant N} x_n, \quad B_N = \inf_{n\in I,\, n\geqslant N} y_n.$$

Si, pour certain $N \in \mathbb{N}$ on a $A_N = -\infty$, alors, pour tout $n \in I$ satisfaisant $n \geqslant N$, on a $x_n = -\infty$, et $a = -\infty$. Cela montre que, pour tout $n \in I$ satisfaisant $n \geqslant N$ on a $x_n + y_n = -\infty$. Ainsi $c = -\infty = a + b$. Si, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $B_N = -\infty$, alors $b = -\infty$. Dans ce cas-là $a + b = -\infty$, et l'inégalité $c \geqslant a + b$ est encore vraie.

Dans la suite, on suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $A_N > -\infty$, et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $B_{n_0} > -\infty$. Comme la suite $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $N \in \mathbb{N}$ satisfaisant $N \geqslant n_0$, on a $B_N > -\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n_0$. Pour tout $n \in I$ tel que $n \geqslant N$, si $x_n > -\infty$, alors

$$x_n + y_n \geqslant x_n + B_N.$$

En prenant la borne supérieure quand n parcourt l'ensemble des éléments de I qui sont $\geqslant N$, par la proposition 3.2.6 on obtient (si $a = -\infty$ alors $b < +\infty$, et donc $B_N < +\infty$)

$$\sup_{n\in I,\, n\geqslant N}(x_n+y_n) \geqslant \sup_{\substack{n\in I,\, n\geqslant N\\ x_n>-\infty}} x_n + B_N = A_N + B_N \geqslant a + B_N.$$

En prenant la borne inférieure quand N parcourt l'ensemble des entier naturels $\geqslant n_0$, on obtient $c \geqslant a + b$. Si on applique (3.12) aux suites $(-x_n)_{n\in I}$ et $(-y_n)_{n\in I}$, on obtient (3.13). □

3.4. Limite

3.4.1. Définition. — Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de $[-\infty,+\infty]$, $\ell \in [-\infty,+\infty]$. Si

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \ell,$$

on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* ℓ ou que ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On désigne par

$$\lim_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n$$

la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.2. Proposition. — *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de $[-\infty,+\infty]$, $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. On suppose que $(x_n)_{n\in I}$ admet une limite, alors $(\lambda x_n)_{n\in I}$ admet aussi une limite, et on a*

$$\lim_{n\in I,\, n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 3.3.5. □

3.4.3. Proposition. — *Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de la droite réelle achevée. Pour tout sous-ensemble infini J de I, on a*

$$\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \liminf_{n\in J,\, n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\in J,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n.$$

En particulier, si $(x_n)_{n\in I}$ tend vers un élément ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\in I}$ tend vers ℓ.

Démonstration. — Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\sup_{n\in J_{\geqslant N}} x_n \leqslant \sup_{n\in I_{\geqslant N}} x_n, \quad \inf_{n\in J_{\geqslant N}} x_n \geqslant \inf_{n\in I_{\geqslant N}} x_n.$$

□

***3.4.4. Théorème* (théorème des gendarmes)**. — *Soient $(x_n)_{n\in I}$, $(y_n)_{n\in I}$ et $(z_n)_{n\in I}$ des suites d'éléments de $[-\infty,+\infty]$. On suppose les conditions suivantes :*

(1) *il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in I$ satisfaisant $n\geqslant n_0$, on a*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

(2) *les suites $(x_n)_{n\in I}$ et $(z_n)_{n\in I}$ ont la même limite ℓ.*

Alors la suite $(y_n)_{n\in I}$ tend vers ℓ aussi.

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.6, on a

$$\ell = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n \leqslant \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} z_n = \ell,$$
$$\ell = \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n \leqslant \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} z_n = \ell$$

Donc la suite $(y_n)_{n\in I}$ tend vers ℓ. □

3.4.5. Proposition. — *Soient* $(x_n)_{n\in I}$ *et* $(y_n)_{n\in I}$ *deux suites d'éléments de* $[-\infty,+\infty]$. *On suppose que, pour tout* $n\in I$, *on a* $\{x_n,y_n\}\neq\{-\infty,+\infty\}$. *On suppose que* $(x_n)_{n\in I}$ *tend vers* $\ell\in[-\infty,+\infty]$. *Alors les égalités suivantes sont vraies, pouvu que le terme à droite de l'égalité est bien défini :*

$$\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}(x_n+y_n)=\ell+\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}y_n,\tag{3.12}$$

$$\liminf_{n\in I,\,n\to+\infty}(x_n+y_n)=\ell+\liminf_{n\in I,\,n\to+\infty}y_n.\tag{3.13}$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.7, on a

$$\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}(x_n+y_n)\leqslant\ell+\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}y_n.$$

Par la proposition 3.3.8 on obtient

$$\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}(x_n+y_n)\geqslant\ell+\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}y_n.$$

Donc l'éaglité (3.12) est vraie. Si on applique (3.12) aux suites $(-x_n)_{n\in I}$ et $(-y_n)_{n\in I}$, on obtient (3.13). □

3.4.6. Proposition. — *Soit* $(x_n)_{n\in I}$ *une suite d'éléments de* $[-\infty,+\infty]$.

(1) *Si la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *est croissante, alors elle tend vers* $\sup_{n\in I}x_n$.

(2) *Si la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *est décroissante, alors elle tend vers* $\inf_{n\in I}x_n$

Démonstration. — (1) Pour simplifier la présentation, on suppose que $I=\mathbb{N}$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\sup_{n\in I,\,n\geqslant N}x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}x_n,\qquad\inf_{n\in I,\,n\geqslant N}x_n=x_N.$$

Donc

$$\liminf_{n\in I,\,n\to+\infty}x_n=\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}x_n.$$

(2) est similaire à (1). □

***3.4.7. Théorème* (Bolzano-Weierstrass).** — *Soit* $(x_n)_{n\in I}$ *une suite d'éléments de* $[-\infty,+\infty]$. *Alors il existe une sous-suite de* $(x_n)_{n\in I}$ *qui tend vers* $\limsup_{n\in I,\,n\to+\infty}x_n$.

Démonstration. — On dit que $n\in I$ est un indice de pic si, pour tout $m\in I$ tel que $m\geqslant n$, on a $x_m\leqslant x_n$. On désigne par J l'ensemble des indices de pic.

Si J est un ensemble infini, alors $(x_n)_{n\in J}$ est une sous-suite qui tend vers la limite supérieure de $(x_n)_{n\in I}$.

On suppose que J est fini et on prend $n_0\in I$ tel que $\max J<n_0$. On désigne par ℓ la borne supérieure $\sup_{n\in I_{\geqslant n_0}}x_n$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, si $N\geqslant n_0$, alors la proposition 2.4.5 conduit à

$$\sup_{n\in I_{\geqslant N}}x_n\leqslant\ell.$$

Si l'inégalité stricte est satisfaite, alors $\sup_{n\in I_{\geqslant N}} x_n$ n'est pas un majorant de $\{x_n : n \in I_{\geqslant n_0}\}$, donc il existe $n \in I$ tel que $n_0 \leqslant n < N$ et que $x_m < x_n$ pour tout $m \in I_{\geqslant N}$. Le plus grand entier naturel n satisfaisant à cette condition est un élément de J. Cela contredit l'hypothèse $\max J < n_0$. Donc l'égalité

$$\sup_{n\in I_{\geqslant N}} x_n = \ell \tag{3.14}$$

est vraie, ce qui implique que

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \sup_{n\in I_{\geqslant n_0}} x_n.$$

Par ailleurs, pour tout $m \in I$, si $m \geqslant n_0$, alors $m \notin J$, et donc par l'égalité (3.14) on obtient $x_m < \ell$. Cela montre que, pour toute partie finie I' de $I_{\geqslant n_0}$, on a

$$\max\{x_m : m \in I'\} < \ell,$$

D'après (3.14), on obtient que, pour tout $N \in I_{\geqslant n_0}$, il existe $n \in I_{\geqslant N}$ tel que

$$\forall\, m \in I', \quad x_m < x_n.$$

On fixe une application surjective $f : \mathbb{N} \to I_{\geqslant n_0}$ et on construit une suite strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I comme suit : si n_i est choisi, on prend un élément n_{i+1} de I qui est $> n_i + 1$ et tel que

$$x_{n_{i+1}} > \max\{x_{f(i+1)}, x_{n_i}\}.$$

La restriction de la suite $(x_n)_{n\in I}$ à $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ donne une sous-suite croissante qui tend vers

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} x_{n_i} = \sup_{n\in I_{\geqslant n_0}} x_n = \ell.$$

□

3.4.8. Corollaire. — *Soient $(x_n)_{n\in I}$ et $(y_n)_{n\in I}$ deux suites dans la droite réelle achevée. On a*

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\Big\{\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n,\ \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big\}, \tag{3.15}$$

$$\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\Big\{\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n,\ \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big\}. \tag{3.16}$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.6, on obtient

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\} \geqslant \max\Big\{\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n,\ \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} y_n\Big\}.$$

D'après le théorème 3.4.7, il existe un sous-ensemble infini J de I tel que

$$\lim_{n\in J,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\} = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\}.$$

Soient

$$J_1 = \{n \in J : x_n \geqslant y_n\}, \quad J_2 = \{n \in J : y_n \geqslant x_n\}.$$

Comme $J = J_1 \cup J_2$, J_1 ou J_2 est infini. Sans perte de généralité, on suppose que J_1 est infini. D'après les propositions 3.4.6 et 3.4.3, on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\} &= \lim_{n\in J_1,\, n\to+\infty} \max\{x_n, y_n\} \\ &= \lim_{n\in J_1,\, n\to+\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\in I\, n\to+\infty} x_n.\end{aligned}$$

Cela conduit à (3.15). Si on applique cette égalité à $(-x_n)_{n\in I}$ et $(-y_n)_{n\in I}$, on obtient (3.16). □

3.5. Exercice

3.5.1. Exercice. — Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Pour tout $(a, b) \in X \times X$, On définit $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$ comme suit :

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in X \,:\, a < x < b\}, \\ [a, b[&:= \{x \in X \,:\, a \leqslant x < b\}, \\ ]a, b] &:= \{x \in X \,:\, a < x \leqslant b\}, \\ [a, b] &:= \{x \in X \,:\, a \leqslant x \leqslant b\},\end{aligned}$$

Ces ensembles sont appelés des intervalles délimités supérieurement par b et inférieurement par a. On suppose en outre que $(X, \leqslant)$ possède un plus grand élément $+\infty$ et un plus petit élément $-\infty$.

(1) Soient a et b deux éléments de X. Établir les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}&[a, b] = [a, +\infty] \cap [-\infty, b], \quad]a, b] =]a, +\infty] \cap [-\infty, b], \\ &[a, b[= [a, +\infty] \cap [-\infty, b[, \quad]a, b[=]a, +\infty] \cap [-\infty, b[.\end{aligned}$$

(2) Montrer que, si I et J sont deux intervalles de X, alors $I \cap J$ est aussi un intervalle de X.

(3) Soient I un intervalle de X. Montrer que, pour tout $(x, y) \in I^2$, on a $[x, y] \subseteq I$.

(4) Soient $(a, b) \in X^2$ tel que $a \leqslant b$ et I un intervalle de X délimité supérieurement par b et inférieurement par a. Montrer que, pour tout $x \in I$, $[x, b[$ et $]a, x]$ sont des parties de I.

(5) Soit I une partie de X. On suppose que, pour tout $(x, y) \in I^2$, $[x, y] \subseteq I$. Montrer que I est un intervalle de X.

(6) Soient I et J deux intervalle de X tels que $I \cap J$ soit non vide. Montrer que $I \cup J$ est un intervalle de X.

(7) Soit I un intervalle non vide de X. Soient $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Montrer que I est un intervalle délimité par a et b.

(8) On dit que $(X, \leqslant)$ est dense en lui-même si, pour tout (a, b) tel que $a < b$, il existe $c \in X$ tel que $a < c < b$.

(a) Montrer que la droite réelle achevée est dense en lui-même.

(b) On suppose que $(X, \leqslant)$ est dense en lui-même. Soient $(a, b) \in X^2$ tel que $a \leqslant b$ et I un intervalle non vide délimité par a et b. Montrer que $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

(c) Donner un contre-exemple de l'énoncé de la question précédente dans le cas où $(X, \leqslant)$ est $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre usuelle. Que commentez vous en faisant la comparaison avec la question (6) ?

3.5.2. Exercice. — Soit I un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique bijection croissante de $\mathbb{N}$ dans I.

3.5.3. Exercice. — On dit qu'un ensemble ordonné est achevé si tous ses sous-ensembles admettent des bornes supérieures et inférieures. Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie de X admet une borne supérieure dans X. Le but de cet exercice est de montrer que $(X, \leqslant)$ est achevé.

(1) Montrer que l'ensemble X est non vide.

(2) Soient A une partie de X, $\mathscr{M}_A$ l'ensemble des minorants de A et a la borne supérieure de $\mathscr{M}_A$.

  (a) Montrer que a est un minorant de A.

  (b) En déduire que a est la borne inférieure de A dans X.

(3) Montrer que, pour tout couple (a, b) d'éléments de la droite réelle achevée tel que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ muni de la relation d'ordre restreinte, est achevé.

***3.5.4. Exercice* (Théorème de point fixe de Knaster-Tarski)**

Dans cet exercice, on fixe un ensemble ordonné achevé $(X, \leqslant)$ et une application croissante $f : X \to X$. Soit $F = \{x \in X \,:\, f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de l'application f. Soient A une partie de F,

$$S_A = \{y \in X \,:\, y \text{ est un majorant de } A \text{ et } f(y) \leqslant y\},$$

et m la borne inférieure de S_A dans X.

(1) Montrer que m est un majorant de A.

(2) Montrer que $f(m)$ est un minorant de S_A. En déduire que $f(m) \leqslant m$.

(3) Montrer que $f(f(m)) \leqslant f(m)$.

(4) Montrer que $f(m)$ est un majorant de A.

(5) Montrer que $f(m) \in S_A$. En déduire que $f(m) = m$.

(6) Montrer que m est la borne supérieure de A dans F.

(7) Montrer que l'ensemble F est non vide.

(8) Soient a et b deux éléments de la droite réelle achevée tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe.

(9) Soit Ω un ensemble. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, muni de la relation d'inclusion $\subseteq$, est achevé.

(10) Simplifier la démonstration du théorème de Cantor-Bernstein (Exercice 1.6.6) en utilisant le théorème de point fixe de Knaster-Tarski.

3.5.5. Exercice. — Soient I une partie infinie de $\mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in I}$ une suite de nombres réels, et $\ell \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que $(x_n)_{n\in I}$ tend vers ℓ si et seulement si $\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |x_n - \ell| = 0$.

(1) On suppose que $\lim_{n\in I,\, n\to+\infty} x_n = \ell$. Montrer que
$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} (x_n - \ell) = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} (\ell - x_n) = 0.$$
En déduire que $\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |x_n - \ell| = 0$.

(2) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

(3) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in I}$ est bornée (c'est-à-dire que $\{x_n : n \in I\}$ admet un majorant et un minorant dans $\mathbb{R}$) si et seulement si $\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |x_n| < +\infty$.

(4) En déduire que, si $(x_n)_{n\in I}$ tend vers un élément de $\mathbb{R}$, alors la suite $(x_n)_{n\in I}$ est bornée.

3.5.6. Exercice. — On dit qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in I}$ converge dans $\mathbb{R}$ si elle tend (dans la droite réelle achevée) vers un élément de $\mathbb{R}$. Soient $(x_n)_{n\in I}$ et $(y_n)_{n\in I}$ deux suites de nombres réels qui convergent vers des nombres réels a et b respectivement.

(1) Montrer que $(x_n + y_n)_{n\in I}$ converge vers $a + b$.

(2) Montrer que $(x_n y_n)_{n\in I}$ converge vers ab.

(3) On suppose que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in I$ et que $a \neq 0$. Montrer que $(x_n^{-1})_{n\in I}$ converge vers a^{-1}.

On peut utiliser l'exercice précédent.