CHAPITRE 4

ESPACE MÉTRIQUE

4.1. Métrique

4.1.1. Définition. — Soient X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbb{R}$ une application. Si les condition suivantes sont satisfaites :

(a) pour tout $(x,y) \in X \times X$, $d(x,y) \geqslant 0$, et $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$,

(b) pour tout $(x,y) \in X \times X$, $d(x,y) = d(y,x)$,

(c) (*inégalité triangulaire*) pour tout $(x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

on dit que d est une *métrique* sur X et que (X,d) est un espace métrique.

4.1.2. Exemple. — Soit K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $K \times K \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto |a-b|$ est une métrique sur K. Cette métrique est appelée *métrique usuelle* sur K.

4.1.3. Exemple. — Soit (X,d) un espace métrique. Soient Y un ensemble et $f : Y \to X$ une application injective. Alors l'application

$$Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto d(f(x), f(y))$$

est une métrique sur Y, appelé *métrique induite* par d et f.

En particulier, l'application

$$f : [-\infty, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = +\infty, \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$$

est strictement croissante. Donc la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$ et cette application induisent une métrique sur la droite réelle achevée.

4.1.4. Définition. — Soit K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, V un espace vectoriel sur K. On dit qu'une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ est une *norme* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) pour tout $s \in V$, on a $\|s\| \geqslant 0$, et $\|s\| = 0$ si et seulement si $s = \mathbf{0}$,

(2) pour tout $(a, s) \in K \times V$, $\|as\| = |a| \cdot \|s\|$,

(3) pour tout $(s, t) \in V \times V$, $\|s + t\| \leqslant \|s\| + \|t\|$.

4.1.5. Proposition. — *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'application*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

est une métrique sur V.

Démonstration. — Par définition, l'image de d est contenue dans $[0, +\infty[$, et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. Si x et y sont deux éléments de V, on a

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|.$$

Enfin, si $(x, y, z) \in V^3$, alors

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

4.1.6. Exemple. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les applications suivantes de K^n dans $\mathbb{R}$ sont des normes sur K^n.

(1) $\|\cdot\|_1 : K^n \to \mathbb{R}$, $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = |a_1| + \cdots + |a_n|$,

(2) $\|\cdot\|_2 : K^n \to \mathbb{R}$, $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{1/2}$,

(3) $\|\cdot\|_\infty : K^n \to \mathbb{R}$, $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$.

4.1.7. Définition. — Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on désigne par $B(x, r)$ l'ensemble

$$\{y \in X \,:\, d(x, y) < r\},$$

appelé *boule ouverte* centré en x et de rayon r.

4.1.8. Exemple. — On munit le corps $\mathbb{R}$ de la métrique usuelle. Si x est un élément de $\mathbb{R}$ et si $r > 0$, alors

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, |y - x| < r\} =]x - r, x + r[.$$

Les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont donc les intervalles ouverts non vides délimités par les nombres réels.

4.1.9. Exemple. — On désigne par d la métrique sur la droite réelle achevée définie dans l'exemple 4.1.3. Par définition, si x est un élément de la droite réelle achevée et si $r > 0$, alors

$$B(x, r) = \{y \in [-\infty, +\infty] \,:\, |f(x) - f(y)| < r\} = f^{-1}(]f(x) - r, f(x) + r[).$$

Comme f est strictement croissante, on obtient que les boule ouvertes de $[-\infty, \infty]$ sont les intervalles ouverts et les intervalles de la forme $[-\infty, a[$, $]a, +\infty]$, ainsi que $[-\infty, +\infty]$.

4.2. Topologie

4.2.1. Définition. — Soit X un ensemble. On appelle *topologie* sur X tout sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(a) $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{T}$,

(b) pour tout $(U_1, U_2) \in \mathscr{T}^2$, $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$,

(c) pour toute famille $(V_i)_{i\in I}$ d'élément de $\mathscr{T}$, $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathscr{T}$.

Le couple $(X, \mathscr{T})$ s'appelle un *espace topologique*. Les éléments de $\mathscr{T}$ sont appelé des *ouverts* de l'espace topologique de $(X, \mathscr{T})$. Si une partie F de X est telle que $(X \setminus F) \in \mathscr{T}$, on dit que F est un *fermé* de $(X, \mathscr{T})$.

Soient x un élément de X et $V \subseteq X$. S'il est existe $U \in \mathscr{T}$ tel que $x \in U \subseteq V$, on dit que X est V est un *voisinage* de x.

4.2.2. Proposition. — *Soit (X, d) un espace métrique. Alors l'ensemble*

$$\mathscr{T}_d := \{U \subseteq X \ : \forall\, x \in U,\ \exists\, r > 0,\ B(x, r) \subseteq U\}$$

est une topologie sur X. Par ailleurs, toute ouverte de X appartient à $\mathscr{T}_d$.

Démonstration. — Par définition on voit immédiatement que $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{T}_d$.

Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{T}_d$ et $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Pour tout $x \in U$, il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_j \subseteq U$.

Soit V_1 et V_2 deux éléments de $\mathscr{T}_d$. Pour tout $x \in V_1 \cap V_2$, il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subseteq V_1$ et $B(x, r_2) \subseteq V_2$. Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$. On a $B(x, r) \subseteq V_1 \cap V_2$.

Soient $x \in X$, $r > 0$ et $y \in B(x, r)$. Soit $r' = r - d(x, y) > 0$. Pour tout $z \in B(y, r')$, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r' = r.$$

Cela montre que $B(y, r') \subseteq B(x, r)$. Ainsi $B(x, r) \in \mathscr{T}_d$. □

4.2.3. Exemple. — Soit I une partie infinie de $\mathbb{N}$. On munit le sous-ensemble $I \cup \{+\infty\}$ de la droite réelle achevée la métrique induite par la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$ et la restriction à $I \cup \{+\infty\}$ de l'application $f : [-\infty, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie dans l'exemple 4.1.3. Il s'avère que, pour tout élément n de I, l'ensemble $\{n\}$ est une boule ouverte et donc est un ouvert de $I \cup \{+\infty\}$. Par ailleurs, les boules ouvertes contenant $+\infty$ sont de la forme $I_{\geqslant N} \cup \{+\infty\}$, où $N \in \mathbb{N}$. Ainsi un ouvert de $I \cup \{+\infty\}$ est ou bien une partie de I, ou bien le supplémentaire dans $I \cup \{+\infty\}$ d'une partie finie de I.

4.2.4. Définition. — Soit (X, d) un espace métrique. On munit X de la topologie $\mathscr{T}_d$. Soient A une partie de X et x un élément de X. On dit que x est *adhérent à A* si, pour tout voisinage V de x, l'intersection $V \cap A$ est non vide. On désigne par $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de X qui sont adhérents à A, appelé *l'adhérence* de A dans X.

4.2.5. Proposition. — *Soit (X, d) un espace métrique.*

(1) *Soit A une partie de X. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X (par rapport à la relation d'inclusion $\subseteq$) contenant A.*

(2) *Si A et B sont deux parties de X telles que $A \subseteq B$, alors on a $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

(3) *Pour toute partie A de X, A est un fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Démonstration. — (1) Soient F un fermé de X contenant A, $x \in \overline{A}$. Si $x \in X \setminus F$, alors $X \setminus F$ est un voisinage de x, donc a au moins un élément commun avec A, ce qui est absurd. On obtient donc $\overline{A} \subseteq F$.

Il reste à montrer que $\overline{A}$ est un fermé. Pour tout $x \in X \setminus \overline{A}$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $U_x \cap A = \varnothing$. Comme U_x est un voisinage de tous ses éléments, on obtient que $U_x \subseteq X \setminus \overline{A}$. Cela montre que

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup_{x \in X \setminus \overline{A}} U_x.$$

Donc $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X.

(2) D'après (1), $\overline{B}$ est un fermé tel que $\overline{B} \supseteq B \supseteq A$. Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, on en déduit $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(3) Si A est un fermé, il est sans doute le plus petit fermé contenant A. Réciproquement, si $A = \overline{A}$, comme $\overline{A}$ est un fermé, A l'est aussi. □

4.3. Limite

4.3.1. Définition. — Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y, A une partie du domaine de définition de f, $x \in \overline{A} \setminus A$, et $y \in Y$. Si, pour tout voisinage V de y, il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subseteq V$, on dit que y est la *limite* de la fonction f lorsque la variable dans A tend vers x.

4.3.2. Proposition. — *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y, A une partie du domaine de définition de f, $x \in \overline{A} \setminus A$, et $y \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *y est la* limite *de la fonction f quand la variable dans A tend vers x,*

(2) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x tel que*

$$\forall\, x' \in U \cap A, \quad d(f(x'), y) < \varepsilon,$$

(3) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in A \cap B(x, \delta)$, $d(f(x'), y) < \varepsilon$.*

Par ailleurs, si la fonction f possède une limite lorsque la variable dans A tend vers x, alors la limite est unique.

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Comme $B(y, \varepsilon)$ est un voisinage de y, il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subseteq B(y, \varepsilon)$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Comme U est un voisinage de x, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq U$.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : Pour tout voisinage V de y, il existe $\delta > 0$ tel que $B(y,\delta) \subseteq V$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(B(x,\varepsilon) \cap A) \subseteq B(y,\delta) \subset V$. Comme $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de x, on obtient l'existence d'un voisinage U de x qui vérifie $f(U \cap A) \subseteq V$.

Supposons que y et y' sont des limites distinctes de f lorsque la variable dans A tend vers x. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}d(y,y')$. Par l'inégalité triangulaire on obtient que $B(y,\varepsilon) \cap B(y',\varepsilon) = \varnothing$. Cependant, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que $f(B(x,\delta) \cap A) \subseteq B(y,\varepsilon)$ et $f(B(x,\delta') \cap A) \subseteq B(y',\varepsilon)$. Soit $\delta'' = \min\{\delta,\delta'\}$. On obtient alors que

$$f(B(x,\delta'') \cap A) = \varnothing.$$

Cela est absurd car $x \in \overline{A}$. □

4.3.3. Définition. — Dans le cas où la fonction possède une limite quand la variable dans A tend vers x, on désigne par

$$\lim_{z \in A,\, z \to x} f(z)$$

cette unique limite.

4.3.4. Proposition. — *Soit I une partie infinie de $\mathbb{N}$. On munit $I \cup \{+\infty\}$ de la métrique définie dans l'exemple 4.2.3. Soit $(x_n)_{n \in I}$ une suite dans un espace métrique (X,d) paramétrée par I. Soit $x \in X$. Les conditions suivantes sont équivalent :*

(1) *la suite $(x_n)_{n \in I}$, vu comme une fonction de $I \cup \{+\infty\}$ dans X dont le domaine de définition est I, admet x comme limite lorsque $n \in I$ tend vers $+\infty$,*
(2) *pour tout voisinage V de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n \,|\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq V$,*
(3) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,x) < \varepsilon$ quel que soit $n \in I_{\geqslant N}$,*
(4) $\displaystyle\limsup_{n \in I,\, n \to +\infty} d(x_n,x) = 0$.

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" provient du fait que tout voisinage de $+\infty$ contient un sous-ensemble de I de la forme $I_{\geqslant N}$, où $N \in \mathbb{N}$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : provient du fait que $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de x.

"(3)$\Longrightarrow$(4)" : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \in I_{\geqslant N}, \quad d(x_n,x) < \varepsilon.$$

On obtient ainsi

$$\sup_{n \in I_{\geqslant N}} d(x_n,x) \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre que

$$0 \leqslant \limsup_{n \in I,\, n \to +\infty} d(x_n,x) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\limsup_{n \in I,\, n \to +\infty} d(x_n,x) = 0.$$

“(4)$\Longrightarrow$(1)” : Soit V un voisinage de x. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V$. Comme

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} d(x_n, x) = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\in I_{\geqslant N}} d(x_n, x) = 0,$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in I_{\geqslant N}$, on ait

$$d(x_n, x) \leqslant \frac{r}{2} < r.$$

Donc

$$\{x_n \,:\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq V.$$

□

4.3.5. Définition. — Avec les notations de la proposition précédente, si $(x_n)_{n\in I}$ et x vérifient les conditions équivalentes précisées dans la proposition, on dit que la suite $(x_n)_{n\in I}$ *converge* vers x (lorsque $n \in I$ tend vers $+\infty$).

4.3.6. Corollaire. — *On considère la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$. Soient $(a_n)_{n\in I}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors $(a_n)_{n\in I}$ converge vers ℓ lorsque $n \in I$ tend vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n = \ell.$$

Démonstration. — On suppose d'abord que la suite $(a_n)_{n\in I}$ converge vers ℓ. On a alors

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |a_n - \ell| = 0.$$

Comme

$$\ell - |a_n - \ell| \leqslant a_n \leqslant |a_n - \ell| + \ell,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\ell = \ell - \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |a_n - \ell| &= \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} (\ell - |a_n - \ell|) \leqslant \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n \\ &\leqslant \limsup_{n\in I\, n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |a_n - \ell| + \ell = \ell.\end{aligned}$$

Réciproquement, si

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\in I,\, n\to+\infty} a_n = \ell,$$

alors on a

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} (a_n - \ell) = \limsup_{n\in I\, n\to+\infty} (\ell - a_n) = 0.$$

D'après le corollaire 3.4.8 on obtient

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} |a_n - \ell| = 0$$

puisque $|a_n - \ell| = \max\{a_n - \ell, \ell - a_n\}$. □

4.3.7. Proposition. — *Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et $x \in X$. Alors x appartient à $\overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite dans A qui converge vers x.*

Démonstration. — On suppose que $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un élément x_n de $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A$ (qui est non vide par définition). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Réciproquement, si $(x_n)_{n\in I}$ est une suite dans A qui converge vers $x \in X$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour tout voisinage V de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n : n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq V$. Donc $V \cap A$ est non vide. □

4.3.8. Proposition. — *Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un fermé,*

(2) *pour toute suite $(x_n)_{n\in I}$ qui converge dans X vers un élément $x \in X$, on a $x \in A$.*

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans A qui converge dans X vers un point $x \in X$. On suppose que $x \notin A$. Comme A est un fermé, $X \setminus A$ est un ouvert, donc est un voisinage de x. Cependant, $X \setminus A$ ne contient aucun élément dans la suite $(x_n)_{n\in I}$, ce qui est absurde.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" : Soit $x \in \overline{A}$. Par la proposition précédente, il existe une suite $(x_n)_{n\in I}$ dans A qui converge vers x. D'après la condition (2) on obtient $x \in A$. Donc $A = \overline{A}$ est un fermé. □

4.3.9. Proposition. — *Soient X et Y deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y, A une partie du domaine de définition de X, $x \in \overline{A} \setminus A$, $y \in Y$. Alors les conditions suivantes sont équivalents :*

(1) *f admet y comme limite quand la variable dans A tend vers x,*

(2) *pour toute suite $(x_n)_{n\in I}$ dans A qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in I}$ converge vers y.*

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans A qui converge vers x. Soit V un voisinage de y. Comme f admet y comme limite quand la variable dans A tend vers x, il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subseteq V$. Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{x_n \,|\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq U \cap A.$$

Cela montre que

$$\{f(x_n) \,|\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq V.$$

Donc la suite $(f(x_n))_{n\in I}$ tend vers y.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" : On raisonne par absurde en supposons que y n'est pas une limite de f quand la variable dans A tend vers x. Il existe alors un voisinage V de y tel que

$f^{-1}(V)$ ne contienne l'intersection de A avec aucun voisinage de x. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B\Big(x, \frac{1}{n+1}\Big) \cap A \not\subseteq f^{-1}(V).$$

Soit

$$x_n \in \left(B\Big(x, \frac{1}{n+1}\Big) \cap A\right) \Big\backslash f^{-1}(V).$$

Par définition, on a

$$\limsup_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0,$$

et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x. Cependant l'intersection de $\{f(x_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ avec V est vide. Donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers y. □

4.4. Complétude

4.4.1. Définition. — Soient X un espace métrique, $(x_n)_{n \in I}$ une suite dans X, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Si

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{(n,m) \in I^2_{\geqslant N}} d(x_n, x_m) = 0,$$

alors on dit que $(x_n)_{n \in I}$ est une *suite de Cauchy*. Si toute suite de Cauchy dans X converge, on dit que X est *complet*.

4.4.2. Proposition. — *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in I}$ une suite dans X.*

(1) *Si $(x_n)_{n \in I}$ converge, alors elle est une suite de Cauchy.*

(2) *Si $(x_n)_{n \in I}$ est une suite de Cauchy, alors toutes ses sous-suites sont des suites de Cauchy.*

(3) *Si $(x_n)_{n \in I}$ est une suite de Cauchy et si elle possède une sous-suite qui converge, alors elle converge aussi.*

Démonstration. — (1) Soit x la limite de $(x_n)_{n \in I}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$A_N = \sup_{n \in I_{\geqslant N}} d(x_n, x).$$

Pour tout $(n, m) \in I^2_{\geqslant N}$, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x) \leqslant 2A_N,$$

ce qui conduit à

$$0 \leqslant \sup_{(n,m) \in I^2_{\geqslant N}} d(x_n, x_m) \leqslant 2A_N.$$

En prenant la borne inférieure, on obtient

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{(n,m) \in I^2_{\geqslant N}} d(x_n, x_m) = 0.$$

(2) On suppose que J est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On a

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \sup_{(n,m)\in J^2_{\geqslant N}} d(x_m, x_n) \leqslant \sup_{(n,m)\in I^2_{\geqslant N}} d(x_m, x_n).$$

En prenant la borne inférieure par rapport à $N \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(n,m)\in J^2_{\geqslant N}} d(x_n, x_m) = 0.$$

(3) Soit J un sous-ensemble infini de I tel que $(x_n)_{n\in J}$ converge vers un certain $x \in X$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soient

$$B_N = \sup_{(n,m)\in I^2_{\geqslant N}} d(x_n, x_m), \quad C_N = \sup_{n\in J_{\geqslant N}} d(x_n, x).$$

Pour tout $(n, m) \in I_{\geqslant N} \times J_{\geqslant N}$, par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, x) \leqslant B_N + C_N.$$

Cela montre que

$$0 \leqslant \sup_{n\in I_{\geqslant N}} d(x_n, x) \leqslant B_N + C_N.$$

En prenant la borne inférieure, d'après le corollaire 3.4.8, on obtient

$$\limsup_{n\in I,\, n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$$

□

4.4.3. Proposition. — *Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X. Si A est complet, alors il est un fermé de X. Réciproquement, si X est complet, alors tous ses fermés sont complets.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans A qui converge dans X. Alors $(x_n)_{n\in I}$ est une suite de Cauchy. Comme A est complet, la suite $(x_n)_{n\in I}$ converge dans A. Donc $x \in A$. Cela montre que A est fermé.

Réciproquement, on suppose que X et complet. Soient A une partie fermé de X et $(x_n)_{n\in I}$ une suite de Cauchy dans A. Si on considère $(x_n)_{n\in I}$ comme une suite dans X, elle est aussi une suite de Cauchy. Comme X est complet, la suite $(x_n)_{n\in I}$ converge vers un élément x de X. Comme A est fermé, on obtient $x \in A$. Donc $(x_n)_{n\in I}$ converge dans A. □

4.5. Compacité

4.5.1. Définition. — Soient X un espace métrique et A une partie de X. On dit qu'une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X est un *recouvrement ouvert* de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Si de plus I est un ensemble fini, on dit que ce recouvrement ouvert est fini. Si J est un sous-ensemble de I tel que

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j,$$

alors on dit que $(U_j)_{j\in I}$ est un *sous-recouvrement* de $(U_i)_{i\in I}$.

4.5.2. Lemme. — *Soient X un espace topologique, $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans X et $x \in X$. Alors la suite $(x_n)_{n\in I}$ admet une sous-suite qui converge vers x si et seulement si, pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\{n \in I \mid x_n \in V\}$ est infini.*

Démonstration. — "$\Longrightarrow$" Soit J un sous-ensemble infini de I tel que $(x_n)_{n\in J}$ converge vers x. Pour tout voisinage V de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J_{\geqslant N} \subseteq \{n \in I \mid x_n \in V\}$. Donc $\{n \in I \mid x_n \in V\}$ est un sous-ensemble infini de I.

"$\Longrightarrow$" : Soit $n_0 = \min I$. On construit par récurrence une suite strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans I comme suit. Supposons que $n_0, \ldots, n_{k-1}$ sont choisis, on désigne par n_k le plus petit élément de l'ensemble non vide

$$\{n \in I \mid n > n_{k-1},\ x_n \in B(x, (k+1)^{-1})\}.$$

Soit $J = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Alors $(x_n)_{n\in J}$ converge vers x. □

4.5.3. Proposition. — *Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Tout recouvrement ouvert de A admet un sous-recouvrement fini.*

(2) *Toute suite dans A admet une sous-suite qui converge dans A.*

(3) *A est complet, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie P_ε de A tel que*

$$A \subseteq \bigcup_{x \in P_\varepsilon} B(x, \varepsilon).$$

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans A. On suppose qu'aucune sous-suite de $(x_n)_{n\in I}$ ne converge dans A. Par le lemme précédent on obtient que, pour tout $x \in A$ il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $I_x := \{n \in I \mid x_n \in V_x\}$ soit un ensemble fini. La famille $(V_x)_{x\in A}$ forme un recouvrement fini de A. Comme A est compact, il existe un sous-ensemble fini P de A tel que $(V_x)_{x\in P}$ forme un recouvrement ouvert de A. Cela montre que

$$I = \bigcup_{x \in P} I_x.$$

Cependant, comme P et les I_x sont des ensembles finis, cela contredit le fait que I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Montrons d'abord que A est complet. Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite de Cauchy dans A. Comme $(x_n)_{n\in I}$ admet une sous-suite convergente, d'après la proposition 4.4.2 on obtient que $(x_n)_{n\in I}$ converge.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. On suppose que $(U_i)_{i\in I}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini. Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-ensembles de A telle que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad A\subseteq\bigcup_{x\in R_n}B(x,2^{-n}).$$

On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x_n\in R_n$,

(ii) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$, $x_n\in B(x_{n-1},3/2^n)$,

(iii) pour toute partie finie J de I, $B(x_n,1/2^n)\nsubseteq\bigcup_{j\in J}U_j$.

En effet, si x_{n-1} est choisi, pour tout $y\in B(x_{n-1},2^{1-n})$, il existe $x\in R_n$ tel que $y\in B(x,2^{-n})$, et donc

$$d(x,x_{n-1})\leqslant d(x,y)+d(y,x_{n-1})<\frac{3}{2^n}.$$

On en déduit

$$B(x_{n-1},2^{1-n})\subseteq\bigcup_{x\in R_n\cap B(x_{n-1},3/2^n)}B(x,2^{-n}).$$

Comme $B(x_{n-1},2^{1-n})$ n'est pas recouvert par une sous-famille finie de $(U_i)_{i\in I}$, il existe $x_n\in R_n\cap B(x_{n-1},3/2^n)$ tel que $B(x_n,1/2^n)$ ne soit pas recouvert par une sous-famille finie de $(U_i)_{i\in I}$.

Pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $(n,m)\in I_{\geqslant N}$, on a

$$d(x_n,x_m)\leqslant\sum_{k=N}^{+\infty}d(x_k,x_{k+1})\leqslant 3\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{3}{2^{N-1}}.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme A est complet, cette suite converge vers un certain élément x de A. Soient $i\in I$ et $\varepsilon>0$ tels que $B(x,\varepsilon)\subseteq U_i$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $x_n\in B(x,\varepsilon/2)$ et $1/2^n<\varepsilon/2$. Ainsi

$$B(x_n,2^{-n})\subseteq B(x,\varepsilon)\subset U_i,$$

ce qui conduit à une contradiction. □

4.5.4. Définition. — Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Si l'ensemble A vérifie les conditions équivalentes dans la proposition 4.5.3, on dit que A est *compact*.

4.5.5. Proposition. — *Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Pour tout $x\in X$, il existe une boule ouvert centrée en X qui contient A.*

(2) *Il existe une boule ouverte dans X qui contient A.*

(3) *Il existe un recouvrement fini de A constitué des boules ouvertes dans X.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer (3) implique (1). Soient $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$, $(r_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_{>0}^n$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i)$. Soit

$$r = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d(x_i, x) + r_i.$$

Pour tout $y \in A$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $y \in B(x_i, r_i)$. Par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_i) + d(x_i, y) < r.$$

Cela montre que $A \subseteq B(x, r)$. □

4.5.6. Définition. — Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Si A vérifie les conditions équivalentes de la proposition 4.5.5, on dit que A est *borné*.

4.5.7. Proposition. — *Soient X un espace métrique et A un sous-ensemble de X.*

(1) *Si A est compact, alors il est un fermé et est borné.*

(2) *Si X est compact et A est un fermé de X, alors il est compact.*

Démonstration. — (1) D'après la proposition 4.5.3, A est complet et borné. D'après la proposition 4.4.3, A est un femré.

(2) Soit $U = X \setminus A$. Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A, alors

$$X = U \cup \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Comme X est compact, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$X = U \cup \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Comme $U \cap A = \varnothing$, on obtient

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j.$$

□

4.6. Exercice

4.6.1. Exercice. — Soit (X, d) un espace métrique. On munit X de la topologie $\mathscr{T}_d$ induite par la métrique d.

(1) Montrer que $\varnothing$ et X sont des fermés.

(2) Montrer que l'union de deux fermés de X est un fermé.

(3) Monter que l'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

(4) Soit $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que $B(x, r)$ est un ouvert et

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \ : \ d(x, y) \leqslant r\}$$

est l'adhérence de $B(x, r)$.

4.6.2. Exercice. — On munit le corps réel $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle (c'est-à-dire la topologie induite par la métrique $(a,b) \mapsto |a-b|$).

(1) Montrer que, pour tout $(a,b) \in [-\infty,+\infty]^2$, $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On peut commencer par le cas où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$ en montrant que $]a,b[$ est une boule.

(2) Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}_U$ l'ensemble des intervalles de la forme $]a,b[$, où $(a,b) \in [-\infty,+\infty]^2$, qui sont contenu dans U. On munit $\mathscr{I}$ de la relation d'inclusion $\subseteq$.

   (a) Soit $x \in U$ et $\mathscr{I}_x$ l'ensemble des $I \in \mathscr{I}_U$ tels que $x \in I$. Montrer que $\mathscr{I}_x$ est non vide et que $\bigcup_{I\in\mathscr{I}_x} I$ est un élément de $\mathscr{I}_x$. En déduire que $\mathscr{I}_x$ admet un plus grand élément.

   (b) Soit I un élément maximal de $\mathscr{I}_U$. Montrer que, pour tout $x \in I$ on a $I = I_x$.

   (c) Montrer que, pour tout $(x,y) \in U \times U$, ou bien $I_x = I_y$, ou bien $I_x \cap I_y$ n'a pas d'élément commum.

   (d) Montrer que U s'écrit comme une union disjointe d'intervalles ouverts.

4.6.3. Exercice. — On considère l'application f de la droite réelle achevée dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+1}, & x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = +\infty, \\ -1 & x = -\infty. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est strictement croissante et que l'image de f est $[-1,1]$.

(2) Montrer que l'image d'un intervalle de la droite réelle achevée par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(3) Montre que l'image réciproque d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par f est un intervalle de la droite réelle achevée.

(4) On considère la métrique sur la droite réelle achevée induite par la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$ et l'application f. Montrer que les boules ouvertes de la droite réelle achevée sont de la forme

$$]a,b[, \quad]a,+\infty], \quad [-\infty,b], \quad [-\infty,+\infty],$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

4.6.4. Exercice. — Soient (X,d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. On dit qu'un élément x de X est *à l'intérieur* de A si A est un voisinage de x. On désigne par A° l'ensemble des éléments $x \in X$ qui sont à l'intérieur de A. On désigne par ∂A l'ensemble $\overline{A} \setminus A^\circ$ et on l'appelle *frontière* de A.

(1) Montrer que, si U est un ouvert de X contenu dans A, alors on a $U \subseteq A^\circ$.

(2) Montrer que A° est un ouvert. En déduire que A° est le plus grand ouvert contenu dans A.

(3) Montrer que $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

(4) Montrer que ∂A est un fermé.

(5) Montrer que $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

(6) Montrer que A est ouvert et fermé si et seulement si $\partial A = \varnothing$.

(7) On munit $\mathbb{R}$ de la métrique usuelle. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $\mathbb{Q}$, et ceux de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.6.5. Exercice. — On dit que deux suite $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ de nombres réels (où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$) sont *adjacentes* si $(u_n)_{n\in I}$ est croissante, $(v_n)_{n\in I}$ est décroissante, et $(v_n - u_n)_{n\in I}$ tend vers 0.

(1) Soient $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ deux suites adjacentes. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in I}$ est décroissante et que, pour tout $(n, m) \in I^2$, $u_n \leqslant v_m$.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\in I}$ et $(v_n)_{n\in I}$ convergent dans $\mathbb{R}$.

(3) Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n\in I}$. Montrer que elle est aussi la limite de $(v_n)_{n\in I}$.

4.6.6. Exercice. — Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, soient

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

(1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ sont adjacentes. On désigne par e leur limite.

(2) A quel indice n faut-il calculer u_n pour avoir une approximation de e à 10^{-3} près ?

(3) Montrer que e est irrationnel.