CHAPITRE 5

ANALYSE LOCALE

5.1. Symbol de Landau

Dans ce paragraphe, on fixe un espace métrique (X, d).

5.1.1. Définition. — Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et A un sous-ensemble de $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. on désigne par

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \in A$$

la condition suivante :

Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ quel que soit $x \in A$.

Si x_0 est un élément de $\overline{A} \setminus A$, on désigne par

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \in A,\ x \to x_0$$

la condition suivante :

Il existe $M > 0$ et un voisinage U de x_0 tels que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ quel que soit $x \in A \cap U$.

Si x_0 est un élément de $\overline{A} \setminus A$, on désigne par

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \in A,\ x \to x_0$$

la condition suivante :

Il existe une application $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ et un voisinage U de x_0 tels que $\lim\limits_{x \in A,\, x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et que $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)|g(x)|$ quel que soit $x \in A \cap U$.

5.1.2. Exemple. — (1) Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.

(2) Si $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = O(h(x))$.

(3) Si $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = o(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.

(4) Si $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.

(5) Si $f_1(x) = O(g(x))$ et $f_2(x) = O(g(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.

(6) Si $f_1(x) = O(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$.

(7) Si $f_1(x) = O(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$.

5.2. Continuité

5.2.1. Définition. — Soit X et Y deux espaces métriques, f de fonction de X dans Y, A le domaine de définition de f, et $x_0 \in A$. On dit que f est continue en x_0 si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U \cap A) \subseteq V$. Dans le cas où x_0 est un *point d'accumulation* de A, c'est-à-dire que x_0 est adhérent à $A \setminus \{x_0\}$, cette condition revient à dire que la fonction admet $f(x_0)$ comme limit quand la variable dans $A \setminus \{x_0\}$ tend vers x_0.

Si la fonction f est continue en tout point de son domaine de définition, on dit que la fonction f est *continue*.

5.2.2. Proposition. — *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, f de fonction de X dans Y, A le domaine de définition de f, et $x \in A$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la fonction f est continue en x,*

(2) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in A$ satisfaisant $d_X(x', x) < \delta$, on a $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$,*

(3) *pour toute suite $(x_n)_{n\in I}$ dans A qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in I}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Comme $B(f(x), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U \cap A) \subseteq V$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq U$. Pour tout $x' \in A$ tel que $d_X(x', x) < \delta$, on a $x' \in U \cap A$ et donc $d_Y(f(x'), f(x)) < \delta$.

"(2)$\Longrightarrow$(3)" : Soit $\varepsilon > 0$. Par (2), il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in A \cap B(x, \delta)$, on a $f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$. Comme $(x_n)_{n\in I}$ converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n \,|\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq B(x, \delta)$. On en déduit que $\{f(x_n) \,|\, n \in I_{\geqslant N}\} \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, d'où la convergence de la suite $(f(x_n))_{n\in I}$ vers $f(x)$.

"(3)$\Longrightarrow$(1)" : On suppose qu'il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B(x, (n+1)^{-1}) \cap A$ avec $f(x_n) \notin V$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Cependant, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas d'élément de V et donc ne converge pas vers $f(x)$. □

5.2.3. Proposition. — *Soient X, Y et Z trois espaces métriques, f une fonction de X dans Y, et g une fonction de Y dans Z. Soit x un élément du domaine de définition de $g \circ f$. Si f est continue en x et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x.*

Démonstration. — Soit $(x_n)_{n\in I}$ une suite dans le domaine de définition de $g \circ f$, qui converge vers x. Alors, par la continuité de f en x, on obtient que $(f(x_n))_{n\in I}$ est une suite dans le domaine de définition de g qui converge vers $f(x)$. On en déduit, par la continuité de g en $f(x)$, que $(g(f(x_n)))_{n\in I}$ converge vers $g(f(x))$. □

***5.2.4. Théorème* (Prolongement par continuité).** — *Soient X et Y des espaces métriques, f une fonction continue de X dans Y, A le domaine de définition de f, B un sous-ensemble de $\overline{A}\setminus A$. On suppose que, pour tout $x\in B$, la fonction f admet une limite quand la variable dans A tend vers x. Alors il existe une unique fonction continue $\widetilde{f}$ de X dans Y, dont le domaine de définition est $A\cup B$, qui prolongent la fonction f.*

Démonstration. — Pour tout $x_0\in A$, soit $\widetilde{f}(x_0)=f(x)$; pour tout $x_0\in B$, soit

$$\widetilde{f}(x_0)=\lim_{x\in A,\,x\to x_0} f(x).$$

Ainsi on définit une fonction de X dans Y, dont le domaine de définition est $A\cup B$. Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est continue. Soient $x_0\in A\cup B$, $\varepsilon>0$. Il existe $\delta>0$ tel que

$$\forall\, x\in A\cap B(x_0,\delta),\quad d(f(x),\widetilde{f}(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $y\in B$ tel que $d(y,x_0)<\delta/2$. Pour tout $x\in A$, si $d(x,y)<\delta/2$, par l'inégalité triangulaire on a $d(x,x_0)<\delta$ et donc $d(f(x),\widetilde{f}(x_0))<\varepsilon/2$. Par ailleurs, par la définition de $\widetilde{f}(y)$, il existe $\delta'>0$ tel que

$$\forall\, x\in A\cap B(y,\delta'),\quad d(f(x),\widetilde{f}(y))<\varepsilon/2.$$

Comme $y\in\overline{A}$, tout voisinage de y admet une intersection non vide avec A. Soit $x_1\in A$ tel que $d(x_1,y)<\min\{\delta',\delta/2\}$. Par l'inégalité triangulaire on obtient

$$d(\widetilde{f}(y),\widetilde{f}(x_0))\leqslant d(f(x),\widetilde{f}(y))+d(f(x),\widetilde{f}(x_0))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

On obtient alors que, pour tout $y\in A\cup B$, si $d(y,x_0)<\delta/2$, alors $d(\widetilde{f}(y),\widetilde{f}(x_0))<\varepsilon$. Donc $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

L'unicité de $\widetilde{f}$ provient de sa continuité. □

5.2.5. Proposition. — *Soient X et Y deux espaces métrique, et $f:X\to Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalente :*

(1) *f est continue,*

(2) *pour tout sous-ensemble ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est ouvert,*

(3) *pour tout sous-ensemble fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est fermé.*

5.3. Continuité uniforme

5.3.1. Définition. — Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y, et A un sous-ensemble du domaine de définition de f. On dit que f est *uniformément continue* sur A si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $(x,x')\in A\times A$ vérifiant $d_X(x,x')<\delta$, on a $d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

5.3.2. Proposition. — *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, f une fonction de X dans Y, et A un sous-ensemble du domaine de définition de f. On suppose que f est uniformément continue sur A.*

(1) *Soit x un élément du domaine de définition de f. On suppose qu'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap \mathrm{Dom}(f) \subseteq A$. Alors la fonction f est continue en x.*

(2) *Pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in I}$ dans A, $(f(x_n))_{n\in I}$ est une suite de Cauchy dans Y.*

(3) *Dans le cas où Y est complet et $A = \mathrm{Dom}(f)$, la fonction f s'étend de façon unique en une fonction continue sur l'adhérence du domaine de définition de f.*

Démonstration. — (1) provient de la proposition 5.2.2.

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, x') \in A^2$ tel que $d_X(x, x') < \delta$, on a $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\in I}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $(n, m) \in I^2_{\geqslant N}$, on a $d(x_n, x_m) < \delta$. Par conséquent, pour ces (n, m), on a $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Ainsi $(f(x_n))_{n\in I}$ est une suite de Cauchy.

(3) Comme Y est complet, tout suite de Cauchy dans Y est convergente. Le résultat provient donc du théorème 5.2.4. □

5.3.3. Théorème. — *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et f une fonction continue de X dans Y. Si A est un sous-ensemble compact du domaine de definition de f, alors f est uniformément continue sur A. Par ailleurs, pour tout sous-ensemble fermé F de X, l'image de $A \cap F$ par f est compact.*

Démonstration. — On suppose que la fonction f n'est pas uniformément continue sur A. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telles que

$$\lim_{n\to+\infty} d_X(x_n, y_n) = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon.$$

On prend un sous-ensemble infini I de $\mathbb{N}$ tel que $(x_n)_{n\in I}$ converge vers un élément x de A, puis un sous-ensemble infini J de I tel que $(y_n)_{n\in J}$ converge vers un certain $y \in A$. Rappelons que $(x_n)_{n\in J}$ converge encore vers x. Pour tout $n \in J$ on a

$$0 \leqslant d_X(x, y) \leqslant d_X(x_n, y_n) + d_X(x_n, x) + d_X(y_n, y).$$

Par passage à la limite quand $n \in J$ tend vers $+\infty$, on obtient $x = y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire on a

$$0 \leqslant d_Y(f(x_n), f(y_n)) \leqslant d_Y(f(x_n), f(x)) + d_Y(f(y_n), f(x)).$$

Par passage à la limite quand $n \in J$ tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\in J,\, n\to+\infty} d_Y(f(x_n), f(y_n)) = 0.$$

Cela contredit l'hypothèse

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon.$$

Soit F un fermé de X. Soit $(w_n)_{n\in I}$ une suite d'éléments de $f(A\cap F)$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in I}$ dans $A\cap F$ tel que $f(x_n)=w_n$ pour tout $n\in I$. Comme A est compact, il existe un sous-ensemble infini J de I tel que $(x_n)_{n\in J}$ converge vers un certain x. Comme A et F sont fermés, on a $x\in A\cap F$. Par la continuité de f, on obtient que la suite $(w_n)_{n\in J}$ converge vers $f(x)$. Donc $f(F)$ est compact. □

5.3.4. Corollaire. — *Soient X un espace métrique, f une fonction de X dans $\mathbb{R}$, et A un sous-ensemble compact du domaine de définition de f. Alors il existe $(a,b)\in A\times A$ tel que*

$$f(a)=\sup_{x\in A}f(x),\quad f(b)=\inf_{x\in A}f(x).$$

Démonstration. — L'image de A par f est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, donc est fermé et borné. On en déduit que $\sup f(A)$ et $\inf f(A)$ appartiennent à $f(A)$. □

5.3.5. Exemple. — Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f:X\to Y$ une application, et $\alpha>0$. On dit que f est α-lipschitzienne si, pour tout $(x,x')\in X\times X$, on a

$$d_Y(f(x),f(x'))\leqslant \alpha\, d_X(x,x').$$

Si f est α-lipschitzienne pour certain $\alpha>0$, on dit que f est *lipschitzienne*. Il s'avère que toute application lipschitzienne est uniformément continue, et donc est continue.

5.4. Continuité d'application linéaire

Dans ce paragraphe, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.4.1. Proposition. — *Soient $(V,\|\cdot\|_V)$ et $(W,\|\cdot\|_W)$ des espaces vectoriel sur K. Soit*

$$f:V\longrightarrow W$$

une application multi-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1)
$$\|f\|:=\sup_{x\in V\setminus\{0\}}\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}<+\infty$$

(2) *l'application f est lipschtzienne,*

(3) *l'application f est uniformément continue,*

(4) *l'application f est continue.*

Démonstration. — "(1)$\Longrightarrow$(2)" : Si x et y sont deux éléments de V, on a

$$\|f(x)-f(y)\|_W=\|f(x-y)\|_W\leqslant\|f\|\cdot\|x-y\|_V.$$

Donc f est lipschtzienne.

"(2)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(4)" sont évidents.

"(4)$\Longrightarrow$(1)" : L'image réciproque de $\overline{B}(0,1) \subset W$ est un voisinage de 0 dans V. Donc il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(0,\delta) \subset f^{-1}(\overline{B}(0,1))$. Ainsi on a

$$\|f(x)\| \leqslant \delta^{-1}\|x\|.$$

□

5.4.2. Définition. — Soit V un espace vectoriel sur K. On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que

$$\forall\, x \in V, \quad C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1.$$

La proposition précédente montre que les deux norms $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalente si et seulement si les applications d'identité de $(V, \|\cdot\|_1)$ dans $(V, \|\cdot\|_2)$ et de $(V, \|\cdot\|_2)$ dans $(V, \|\cdot\|_1)$ sont continues, ou encore les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ induise la même topologie sur V.

5.4.3. Définition. — Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur K, et $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ une base de V. On désigne par $\|\cdot\|_{\boldsymbol{e},\infty}$ la norme sur V définie par

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_{\boldsymbol{e},\infty} := \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |\lambda_i|.$$

5.4.4. Théorème. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K. Toutes les normes sur V sont équivalentes. En particulier, les sous-ensembles compacts de V sont précisément les parties fermés et bornés (par rapport à n'import quelle norme).*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $K = \mathbb{R}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur V. L'application $\|\cdot\|$ est lipschitzienne car

$$\forall\,(x,y) \in V \times V, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

Soit $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ une base de V. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\| \leqslant |\lambda_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |\lambda_r| \cdot \|e_r\| \leqslant \sum_{i=1}^r \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_{\boldsymbol{e},\infty}.$$

Soit

$$S = \{x \in V \mid \|x\|_{\mathrm{e},\infty} = 1\}.$$

C'est un sous-ensemble compact de V. Donc la fonction $\|\cdot\|$ atteint son minimum $\delta > 0$ sur S. On en déduit que, pour tout $x \in V$, $\|x\| \geqslant \delta\|\cdot\|_{\boldsymbol{e},\infty}$. □

5.4.5. Corollaire. — *Soient V et W deux espaces vectoriels normés. Si V est de dimension finie, alors toute application K-linéaire $f : V \to W$ est continue.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ une base de V. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$, on a

$$\|f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r)\|_W \leqslant \sum_{i=1}^r |\lambda_i| \cdot \|f(e_i)\|_W \leqslant \left(\sum_{i=1}^r \|f(e_i)\|_W\right) \cdot \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_{\boldsymbol{e},\infty}.$$

□

5.5. Théorème de valeurs intermédiaire

5.5.1. Théorème. — *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $\xi \in \,]a,b[$ tel que $f(\xi) = 0$.*

Démonstration. — On suppose que f n'admet pas de point de zéro dans $[a,b]$. Sans perte de généralité, on suppose que $f(a) < 0 < f(b)$. On construit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[a,b]$ comme suit. Soient $a_0 = a$, $b_0 = b$. Si a_n et b_n sont choisis de sorte que $a_n < b_n$ et $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. On prend $c_n = (a_n + b_n)/2$. Si $f(c_n) < 0$ on prend $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Ces deux suite sont adjacente car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Les deux suites convergent vers la même limite que l'on note c. Par la continuité de f on a

$$f(c)^2 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0,$$

d'où $f(c) = 0$. □

5.5.2. Corollaire. — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si un intervalle est contenu dans le domaine de définition de f, alors son image est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

5.6. Différentiabilité

5.6.1. Définition. — Soient V et W deux espaces vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, f une fonction de V dans W, et x_0 un élément de V. On suppose que le domaine de définition de f est un voisinage de x_0 (ou de façon équivalente, x_0 appartient à l'intérieur de $\mathrm{Dom}(f)$). On dit que la fonction f est *différentiable* en x_0 s'il existe une application linéaire continue $Df(x_0) : V \to W$ telle que

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

L'application linéaire continue $Df(x_0)$ est appelée *différentielle de f en x_0*. Pour tout $h \in V$ fixé, on a

$$Df(x_0)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t}.$$

5.6.2. Remarque. — Si f est différentiable en x_0, sa différentielle est unique. En effet, si φ_1 et φ_2 sont des applications linéaires continues de V dans W, telles que

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)-\varphi_1(h)\| = o(\|h\|), \quad \|f(x_0+h)-f(x_0)-\varphi_2(h)\| = o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

alors on a

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)(h)\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Soient $r > 0$ et $\varepsilon(\cdot) : B(0,r) \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et} \quad \|(\varphi_1 - \varphi_2)(h)\| \leqslant \varepsilon(h)\|h\|.$$

On obtient alors, pour tout $\delta > 0$

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant \sup_{\|h\|=\delta} \frac{\|(\varphi_1 - \varphi_2)(h)\|}{\|h\|} \leqslant \sup_{\|h\|=\delta} \varepsilon(h).$$

En prenant la borne inférieure par rapport à δ, on obtient $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$ et donc $\varphi_1 = \varphi_2$.

5.6.3. Exercice. — On considère le cas particulier où $V = \mathbb{R}$. D'après le corollaire 5.4.5, toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R} \to W$ est continue. Par ailleurs, φ est de la forme

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1).$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans W qui est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}$, on désigne par $f'(x_0)$ le vecteur $Df(x_0)(1) \in W$. On obtient alors

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Dans ce cas-là on dit aussi que la fonction f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0.

5.6.4. Définition. — Soient V un espace vectoriel normé et f une fonction de V dans $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ est un point de *maximum local* (resp. *minimum local*) s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ est le plus grand élément (resp. plus petit élément) de $f(B(x_0, \delta))$. Si x_0 est un point de maximum local ou minimum local, on dit que x_0 est un point d'extremum local.

5.6.5. Proposition. — *Soient V un espace vectoriel normé et f une fonction de V dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur du domaine de définition de f. On suppose que f est différentiable en $x_0 \in V$. Si x_0 est un point d'extremum local, alors $Df(x_0)$ est la forme linéaire nulle sur V.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ et que, pour tout $h \in V$ vérifiant $\|h\| < \delta$, on a $f(x_0+h) \leqslant f(x_0)$. Pour tout $h \in V \setminus \{0\}$ fixé, on a

$$Df(x_0)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

Comme x_0 est un point de maximum local, on a

$$Df(x_0)(h)^2 = \lim_{t\to 0} -\frac{(f(x_0 + th) - f(x_0))(f(x_0 - th) - f(x_0))}{t^2} \leqslant 0,$$

d'où $Df(x_0)(h) = 0$. $\square$

5.7. Théorème des accroissements finis

5.7.1. Théorème. — *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, qui est différentiable sur $]a, b[$. Alors il existe $\xi \in\ ]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

Démonstration. — On considère la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On a $g(a) = g(b) = f(a)$. Par ailleurs,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il existe $\xi \in\ ]a, b[$ tel que g atteint son extrême en ξ (car sinon g atteint son maximum en un point entre a et b, et atteint son minimum en un point entre a et b aussi, ainsi la fonction g est constante). D'après la proposition 5.6.5, on obtient $g'(\xi) = 0$. □

5.8. Exercice

5.8.1. Exercice. — Soit X un espace métrique. Montrer que les applications continues de X dans $\mathbb{R}$ forment une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}^X$. En déduire que toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ est continue.

5.8.2. Exercice. — Soit P un polynôme de degré impair dans $\mathbb{R}[T]$. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

5.8.3. Exercice. — Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue qui est dérivable sur $]a, b[$. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))x^3 - (b^3 - a^3)f(x).$$

(1) Montrer que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Déterminer la dérivée de la fonction φ.

(2) Montrer qu'il existe $\xi \in\ ]a, b[$ tel que

$$3\xi^2(f(b) - f(a)) = (b^3 - a^3)f'(\xi).$$

5.8.4. Exercice. — Soit f une application continue définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si f est injective, alors elle est strictement monotone.

***5.8.5. Exercice* (Théorème de Darboux)**. — Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, qui est dérivable sur I. Soient a et b

deux éléments de I. On suppose que $f'(a) < f'(b)$. Soient φ_a et φ_b les applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} f'(a), & \text{si } x = a \\ (f(x)-f(a))/(x-a), & \text{si } x \neq a \end{cases},$$

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} f'(b), & \text{si } x = b \\ (f(x)-f(b))/(x-b), & \text{si } x \neq b \end{cases}$$

(1) Montrer que les applications φ_a et φ_b sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

(2) Montrer que, pour tout $\lambda \in [f'(a), f'(b)]$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que, ou bien $\varphi_a(\xi) = \lambda$, ou bien $\varphi_b(\xi) = \lambda$.

(3) Montrer que l'image de f' est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(4) On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin(x^{-1}), & x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que l'application g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(5) La dérivée g' est-t-elle continue ?

(6) Déterminer l'image de g'.

5.8.6. Exercice. — Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $f : [a,b] \to V$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues qui sont différentiables sur $]a,b[$. On suppose que $\|f'(x)\| < g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

(1) Pour tout $t \in]a,b[$, soit

$$E_t = \{x \in]a,b[\ : \ \|f(x) - f(t)\| > g(x) - g(t)\}.$$

Montrer que E_t est ouvert.

(2) On suppose que E_t est non vide et on désigne par β sa borne inférieure. Montrer que $\beta \in]t,b[$ et en déduire une contradiction

(3) Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.

(4) Montrer que, si $\|f'(x)\| \leqslant g'(x)$ pour tout $x \in]a,b$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$

5.9. Convexité

Dans ce paragraphe, on fix un espace vectoriel de dimension finie V sur $\mathbb{R}$.

5.9.1. Définition. — Soit $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de V. On appelle *enveloppe convexe* de S le sous-ensemble $\mathrm{Conv}(S)$ de V de la forme

$$\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \,|\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Soit C un sous-ensemble de V. Si pour tout sous-ensemble fini S de C, on a $\mathrm{Conv}(S) \subseteq C$, on dit que C est convexe.

5.9.2. Définition. — Soit f une fonction de V dans $\mathbb{R}$.