IRS 2007-2008
Groupe BMW
Université Paris 8

Soient $\mathscr{P} = \{A, B, C, D\}$ un ensemble qui contient quatre variables propositionnelles, $\mathscr{A} = \mathscr{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow,), (\}$. On désigne par $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ l'ensemble des mots à l'alphabet $\mathscr{A}$ et par $\mathscr{F}$ l'ensemble des formules à l'alphabet $\mathscr{A}$. Pour tout mot M dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, on désigne par

— $\mathrm{lg}[M]$ la longueur de M,

— $\mathrm{o}[M]$ le nombre d'occurences de la parenthèse ouvrante (dans M,

— $\mathrm{c}[M]$ le nombre d'occurences des symboles de connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ dans M,

— $\mathrm{n}[M]$ le nombre d'occurences du symbole de négation $\neg$ dans M.

Si F est une formule dans $\mathscr{F}$, on désigne par $\mathrm{h}[F]$ la hauteur de F.

Exercice (*à répondre directement sur les lignes*)

1) La hauteur de la formule A est ______________.

2) Soit F la formule $\neg((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (C \wedge \neg D))$. Déterminer les valeurs suivantes :

$$\mathrm{lg}[F] = \_\_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{h}[F] = \_\_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{c}[F] = \_\_\_\_\_\_\_.$$

Problème (*à répondre dans des feuilles différentes*)

I. On considère l'argument suivant :

> *Soit elle n'est pas chez elle, soit elle ne répond pas au téléphone. Mais si elle n'est pas chez elle, alors, elle a été kidnappée. Et si elle ne répond pas au téléphone, c'est qu'elle court un autre danger. Donc soit elle a été kidnappée, soit elle est en danger.*

On désigne par

$A =$"elle est chez elle",

$B =$"elle répond au téléphone",

$C =$"elle a été kidnappée",

$D =$"elle court un autre danger".

1) Exprimer l'argument au-dessus en une formule propositionnelle F.
2) Déterminer l'arbre de decomposition (sous form simplifiée) de F.
3) L'argument comme ci-dessus est-il une tautologie ? Pourquoi ?

II. Considérons la formule

$$F = (((B \Rightarrow C) \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg C)).$$

1) Déterminer l'arbre de décomposition sous forme simplifiée et la hauteur de la formule F.
2) Déterminer le tableau de valeurs de vérité de F.
3) En déduire la formule sous forme normale disjonctive canonique et la formule sous forme normale conjonctive canonique qui sont logiquement équivalentes à F.

III. Soit F une formule quelconque dans $\mathscr{F}$.

1) Montrer que $\mathrm{h}[F] \leq \mathrm{c}[F]$.
2) Montrer que $\mathrm{c}[F] = \mathrm{o}[F] + \mathrm{n}[F]$.
3) Montrer que $\mathrm{lg}[F] = \mathrm{n}[F] + 4\mathrm{o}[F] + 1$.
4) En déduire que $\mathrm{lg}[F] = \mathrm{c}[F] + 3\mathrm{o}[F] + 1$.