IMG 2007-2008
Groupe PM
Université Paris 8

Nom :______________ Prénom :______________ Numéro d'étudiant :______________

Contrôle de connaissance le 5 février 2008

Durée : 3 heures

I. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}.$$

1) Montrer que, si z et w sont deux nombres complexes, alors

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

2) En déduire que, si $(a_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers a, alors $(|a_n|)_{n\geq 1}$ converge vers $|a|$.

3) Montrer que si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente dans $\mathbb{C}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| \leq c_n$ et soit $A_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Montrer que si la suite $(A_n^*)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$B_n = \frac{A_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k(k+1)}.$$

6) Montrer que la suite réelle $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite.

7) En déduire que, si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$.

8) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$. (*Indication : utiliser 7)*)

9) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$. (*Indication : montrer que ce n'est pas une suite de Cauchy*)

II. On désigne par $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes complexes à une variable X. Soit $D : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application telle que

i) $D(P + Q) = D(P) + D(Q)$ quels que soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$,

ii) $D(aP) = aD(P)$ quels que soient $a \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$,

iii) $D(X^n) = nX^{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

iv) $D(1) = 0$.

Si $m \geq 1$ est un entier, on désigne par $D^m : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application composée $\underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{m \text{ copies}}$. Enfin, on note D^0 l'application d'identité de $\mathbb{C}[X]$ vers lui-même.

1) Déterminer $D(X-1)$, $D((X-1)^2)$ et $D((X-1)^3)$.
2) L'application D est-elle injective ? Pourquoi ?
3) L'application D est-elle surjective ? Pourquoi ?
4) Montrer que $D(X^{n+m}) = X^n D(X^m) + X^m D(X^n)$ quel que soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
5) En déduire que $D(PQ) = PD(Q) + QD(P)$ quels que soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. (*Indication : on commence par le cas particulier où* $P = X^n$)
6) En déduire que, pour tous les $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$,

$$D^m(PQ) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i D^i(P) D^{m-i} Q.$$

(*Indication : récurrence en* m.)

7) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ quelconques, déterminer $D((X-a)^n)$. (*Indication : utiliser 5)*)
8) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$.
9) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $a \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $(X-a)Q = P - P(a)$. Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, $(m+1)D^m Q(a) = D^{m+1}P(a)$.
10) Montrer que, si P est un polynôme de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ et si a est un nombre complexe quelconque, alors

$$P = P(a) + DP(a)(X-a) + \frac{D^2P(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{D^nP(a)}{n!}(X-a)^n.$$

(*Indication : récurrence en* n)

11) (*) Soit P un polynôme non-nul. On rappelle que la multiplicité d'une racine a de P est par définition le plus grand entier naturel $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m$ divise P. Montrer que la multiplicité de a est égale au plus grand entier naturel $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(a) = DP(a) = \cdots = D^{m-1}P(a) = 0.$$