IRS 2007-2008
Groupe BMW
Université Paris 8

Nom :______________ Prénom :______________ Numéro d'étudiant :______________

Contrôle de connaissance le 6 février 2008

Durée : 3 heures

I. Soient $\mathscr{P} = \{A, B, C\}$ un ensemble qui contient trois variables propositionnelles, $\mathscr{A} = \mathscr{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow,), (\}$. On désigne par $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ l'ensemble des mots à l'alphabet $\mathscr{A}$ et par $\mathscr{F}$ l'ensemble des formules à l'alphabet $\mathscr{A}$. Pour tout mot M dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, on désigne par $\mathrm{lg}[M]$ la longueur de M. Si F est une formule dans $\mathscr{F}$, on désigne par $\mathrm{h}[F]$ la hauteur de F.

1. Montrer que, pour toute formule $F \in \mathscr{F}$, $\mathrm{lg}[F] \leq 2^{h[F]} - 3$.
2. On considère la formule

$$F = ((\neg A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge (\neg B \wedge C))))$$

   1) Déterminer l'arbre de décomposition sous forme simplifiée et la hauteur de F.
   2) Déterminer le tableau de valeurs de vérité de F.
3. On applique le calcul des propositions dans le cas suivant :
   $A =$"Pierre a réussi son examen"
   $B =$"Marie est contente"
   $C =$"Pierre pleure"
   1) Exprimer les énoncés suivants sous forme de formule propositionnelle :
      — "Pierre a réussi son examen ou Marie est contente"
      — "Il n'est pas vrai que Pierre a réussi son examen si Marie est contente"
   2) On considère l'argument suivant :

      Ou bien Pierre n'a pas réussi son examen, ou bien Marie est contente. Mais si Pierre n'a pas réuissi son examen, il pleure. Et si Pierre pleure, Marie n'est pas contente. Par conséquent, Pierre a réussi son examen si et seulement si Marie est contente.

      i) Exprimer l'argument au-dessus en une formule propositionnelle F.
      ii) Déterminer l'arbre de décomposition sous forme simplifiée de F.
      iii) L'argument comm ci-dessus est-il une tautologie ? Pourquoi ?
4. Considérons le problème suivant :

   Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité. Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon. Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.

   Déterminer la proposition que le prince doit énoncer pour délivrer la princesse.

II. On considère un langage du premier d'ordre $\mathscr{L}$ qui contient

— un symbole de constante c,

— un symbole de fonction à une place f,

— deux symboles de relation à deux places $\simeq$ et $\succ$.

On désigne par $\mathscr{V} = \{v_0, v_1, \cdots\}$ l'ensemble des symboles de variable.

1. On considère la $\mathscr{L}$-structure $\mathfrak{M}$ dont l'ensemble sous-jacent est M comme ci-dessous :
   i) M est l'ensemble des pays du monde,
   ii) $\overline{c}^{\mathfrak{M}}$ est la France,
   iii) $\overline{f}^{\mathfrak{M}}$ est l'application d'identité de M, c'est-à-dire $\overline{f}^{\mathfrak{M}}(x) = x$,
   iv) $(x, y) \in M \times M$ vérifie la relation $\overline{\simeq}^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si l'équipe football du pay x a joué contre celle de y en 2007,
   v) $(x, y) \in M \times M$ vérifie la relation $\overline{\succ}^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si l'équipe footballe du pay x a battu celle de y au moins une fois en 2007.

   1) Interpréter dans cette $\mathscr{L}$-structure les formules suivantes :
      (a) $\forall v_0(\simeq v_0 c \Rightarrow \succ v_0 c)$
      (b) $\forall v_0 \exists v_1(\neg \simeq v_0 f v_1)$
      (c) $\forall v_0(\succ c v_0 \Rightarrow \exists v_1 \succ v_0 v_1)$
   2) Pour chaque énoncé au-dessous, trouver une formule qui ne contient pas de sous-mot de la forme $\neg($, $\neg\forall$, $\neg\exists$ ou $\neg\neg$ et dont l'interprétation dans $\mathscr{L}$ donne l'énoncé correspondant.
      (a) Toutes les équipes ont battu la France en 2007.
      (b) En 2007, toutes les équipes qui ont joué avec la Frace ont été battues par la France.
      (c) En 2007, aucune équipe n'a battu toutes les équipes qui ont joué contre la France.

2. On considère la formule

$$F = \forall v_0(\exists v_1 \forall v_0(\succ v_0 v_1 \Rightarrow \neg \simeq v_0 v_2) \wedge \forall v_2(\exists v_2(\succ v_1 v_2 \vee \simeq f v_0 c) \wedge \simeq v_1 v_2))$$

   Déterminer toutes les occurences libres dans la formule F.

3. On considère la théorie S_0 dans ce langage, constituée des axiomes suivants :

   A_1 : $\forall v_0 \forall v_1(\simeq f v_0 f v_1 \Leftrightarrow \simeq v_0 v_1)$

   A_2 : $\forall v_0 \forall v_1(\succ f v_0 f v_1 \Leftrightarrow \succ v_0 v_1)$

   A_3 : $\forall v_0 \succ f v_0 v_0$

   A_4 : $\forall v_0 \succ v_0 c$

   A_5 : $\forall v_0 \succ v_0 v_0$

   A_6 : $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2((\succ v_0 v_1 \wedge \succ v_1 v_2) \Rightarrow \succ v_0 v_2)$

   1) Montrer que la théorie S_0 est consistante par construire un modèle. (*Indication : on peut par exemple considérer l'ensemble* $\mathbb{N}$ *muni de la relation d'ordre habituelle et de l'application de décalage* $n \mapsto n+1$)
   2) Montrer que la formule $F = \forall v_0 \succ f f v_0 v_0$ est une conséquence formelle de S_0.