IMG 2007-2008
Université Paris 8
Groupe PM

Feuille d'exercices 1

I. Soient E l'ensemble des étudiants, S l'ensemble des jours de la semaine, et pour toute personne x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j. Écrire avec des symboles mathématiques adaptés l'énoncé "*tout étudiant se réville au moins un jour de la semaine avant 8h*". Exprimer la négation de cet énoncé et le traduire en français.

II. On suspecte A, B et C d'avoir commis un vol. Nous avons les informations suivantes :
– si C n'est pas coupable alors B est coupable ;
– si A n'est pas coupable alors C est coupable ;
– si C est coupable alors A l'est aussi ;
– si A est coupable alors B n'est pas coupable.

1) Traduire en langage formel les informations au-dessus.
2) Qui sont coupables ? Justifier votre réponse.

III. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction sur $\mathbb{R}$. On utilise l'expression "*f est continue en x*" pour déssigner la formule

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} \; |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

qui dépend d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$. Soit "*f est continue*" l'énoncé

pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x

En utilisant les principes formels des raisonnements, répondre aux questions suivantes.

1) Exprimer l'énoncé "*f est continue*" en langage formel.
2) Exprimer la formule "*f n'est pas continue en x*" en langage formel.
3) Déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la fonction f est continue.
4) On désigne par l'expression "*f est unformément continue*" l'énoncé

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall y \in \mathbb{R} \; |y - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

   a) Exprimer l'énoncé "*f n'est pas uniformément continue*" en langage formel.

b) Montrer que l'énoncé

$$f \text{ est uniformément continue } \Rightarrow f \text{ est continue}$$

est toujour vrai pour n'import quelle fonction f .

c) Donner un exemple de la fonction f telle que l'énoncé

$$f \text{ est continue } \Rightarrow f \text{ est uniformément continue}$$

est faux.

IV. On désigne par E l'ensemble des étudiant(e)s dans la classe et par Ω l'ensemble des 26 lettres. Soit $f : E \to \Omega$ l'application qui associe à chaque étudiant(e) la première lettre de son nom. Enfin, on désigne par G (resp. F) l'ensemble des garçons (resp. filles) dans la classes.

1) L'application f est-elle injective, surjective et bijective ?
2) Déterminer $f^{-1}(\{C, D\})$;
3) Déterminer $f^{-1}(\{Y\})$;
4) Déterminer $f(G)$, $f(F)$ et $f(F \cap G)$, commenter votre résultat.

V. Soit $P(n)$ la formule suivante qui dépend d'un paramètre $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$n \text{ personnes quelconques ont le même âge.}$$

1) Montrer que $P(1)$ est vraie.
2) Montrer que, pour tout entier $m \geq 2$, $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.
3) Peut-on en conclure que l'énoncé $\forall n\ P(n)$ est vrai ?

VI. On dit qu'un application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *convexe* si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in [0,1]\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Montrer que, si la fonction f est convexe, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

VII. Montrer que pour tout nombre réel positif x et tout entier naturel non-nul n, on a

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

VIII. On désigne par $2\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels paires et par $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des nombres rationnels non-nuls.

1) Construire une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}_{\geq 1}$.

2) Construire une application bijective de $\mathbb{N}$ vers $2\mathbb{N}$.

IX. Soit E un ensemble quelconque. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Montrer que l'on ne peut jamais établir une application bijective de E vers $\mathscr{P}(E)$.