IMG 2007-2008
Université Paris 8
Groupe PM

Feuille d'exercices 2

I. Soit E l'ensemble des étudiant(e)s dans la classe. On désigne par $\sim$ la relation binaire sur E telle que $x \sim y$ si et seulement si les premières lettres des noms de x et de y sont la même. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Déterminer l'ensemble quotient $E/\sim$ en l'identifiant avec un sous-ensemble des 26 lettres.

II. Soit $n \geq 2$ un entier. On désinge par $\sim_n$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$x \sim_n y \textit{ si et seulement si } y - x \textit{ est divisible par } n$$

1) Montrer que $\sim_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. On désignera par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\sim_n$
2) Montrer que les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$ induit par passage aux classes d'équivalence des opérations (que l'on notera encore $+$ et $\times$) sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3) Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times, [0], [1])$ est un anneau commutatif.
4) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

III. Soient E un ensemble et $\prec$ une relation d'ordre sur E. On désigne par $\succ$ la relation sur E telle que

$$x \succ y \textit{ si et seulement si } y \prec x.$$

Montrer que $\succ$ est aussi une relation d'ordre sur E.

IV. Montrer les égalités suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) pour tout élément $x \neq 1$ dans $\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^n}{1-x};$$

3) pour tout élément x dans $\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on a

$$x + 2x + \cdots + nx = \frac{n(n+1)x}{2}.$$

V. Résoudre les équations et les inégalités suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2$; 2) $x+1<\sqrt{x+4}$;

3) $\begin{cases} x+y=27, \\ xy=50; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3a+4b=1, \\ 5a+12b=7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=1, \\ 5x^2+12y^2=7; \end{cases}$ 6) $\cos(2x-7)=1/2$;

7) $|x-5|<|x+1|$.

VI. Montrer les assertions suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(x,y)=\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2}, \quad \min(x,y)=\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2};$$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(|x+y|,|x-y|,|1-x|) \geq \frac{1}{2}.$$