

IMG 2007-2008  
Université Paris 8  
Groupe PM

## Feuille d'exercices 3

I. Soit  $z$  un nombre complexe. Établir les énoncés suivants :

- 1)  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$ ;
- 2)  $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .
- 3)  $\text{Re } z = \text{Re } \bar{z}$  et  $\text{Im } z = -\text{Im } \bar{z}$ .

II. Soient les nombres complexes  $z = 1 + \sqrt{3}i$  et  $w = 2 + 2i$ . Mettre sous forme exponentielle les nombres :  $z$ ,  $w$ ,  $z/w$  et  $zw$ . En utilisant les résultats obtenus, calculer explicitement les valeurs suivantes :  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$ ,  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

III. Soient  $z_1$  et  $z_2$  des nombres complexes. Montrer les égalités suivantes :

- 1)  $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2 \text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$ ,
- 2)  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ .

IV. Déterminer les valeurs absolues et les arguments des nombres complexes suivants :  $1 - i$ ,  $2 - 3i$ ,  $1 + \cos \theta + i \sin \theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ).

V. Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle et puis sous forme  $x + yi$  :

$$i^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (1+i)^n + (1-i)^n \ (n \in \mathbb{N}).$$