

IMG 2007-2008
Université Paris 8
Groupe PM

Feuille d'exercices 3

I. Soit z un nombre complexe. Établir les énoncés suivants :

- 1) $|z^n| = |z|^n$, $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z)$;
- 2) z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
- 3) $\text{Re } z = \text{Re } \bar{z}$ et $\text{Im } z = -\text{Im } \bar{z}$.

II. Soient les nombres complexes $z = 1 + \sqrt{3}i$ et $w = 2 + 2i$. Mettre sous forme exponentielle les nombres : z , w , z/w et zw . En utilisant les résultats obtenus, calculer explicitement les valeurs suivantes : $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

III. Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer les égalités suivantes :

- 1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2 \text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$,
- 2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

IV. Déterminer les valeurs absolues et les arguments des nombres complexes suivants : $1 - i$, $2 - 3i$, $1 + \cos \theta + i \sin \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

V. Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle et puis sous forme $x + yi$:

$$i^n \ (n \in \mathbb{N}), \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad (1+i)^n + (1-i)^n \ (n \in \mathbb{N}).$$