IMG 2007-2008
Université Paris 8
Groupe PM

Feuille d'exercices 4

I. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes dans $\mathbb{R}$. Montrer les énoncés suivants :

1) la suite $(a_n+b_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2) la suite $(a_nb_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3) la suite $(b_n-a_n)_{n\geq 0}$ est convergente et sa limite est $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
4) si tous les a_n sont non-nuls et si la limite de $(a_n)_{n\geq 0}$ est aussi non-nul, alors la suite $(b_n/a_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et sa limite est $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

II. Soient (E,d) un espace métrique, $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E et a un élément dans E. Déterminer la forme formelle des énoncés suivants :

1) $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une suite de Cauchy ;
2) $(a_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers a ;
3) $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente dans E.

III. On appelle suite alternée toute suite dans $\mathbb{R}$ de la forme $((-1)^n a_n)_{n\geq 0}$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathbb{R}_+$ ou dans $\mathbb{R}_-$. Montrer que, si une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}$ est alternée et convergente dans $\mathbb{R}$, alors sa limite est nulle. Généraliser ce résultat.

IV. Soit $(z_n = x_n + iy_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{C}$, où x_n et y_n sont des nombres réels. Montrer que cette suite converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent dans $\mathbb{R}$.

V. Soit $p\geq 1$ un entier.

1) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$,

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p.$$

2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

3) Déterminer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

VI. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

VII. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite dans $\mathbb{R}$ définie par les relations $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

VIII. Soient $0 < a_1 < b_1$ deux nombres réels. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}$ définies par les relations

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites convergent dans $\mathbb{R}$ et que leur limites sont égales.