IMG 2007-2008
Groupe PM
Université Paris 8

Nom :______________ Prénom :______________ Numéro d'étudiant :______________

Contrôle de connaissance le 13 novembre 2007

Durée : 2 heures

Exercices (*à répondre directement sur les lignes*)

1) La valeur absolue du nombre complexe i^{2007} est ______________.
2) L'argument du nombre complexe $(-i)^{2007}$ est ______________ mod $2\pi\mathbb{Z}$.
3) La valeur absoule du nombre complexe $\dfrac{1+i}{1-i}$ est ______________, l'argument du nombre complexe $\dfrac{1+i}{1-i}$ est ______________ mod $2\pi\mathbb{Z}$.

Problèmes

I. On désigne par D l'ensemble des nombres complexes de valeur absolue < 1.

1) Montrer que, pour tous les nombres complexes z et w, on a

$$|1-\overline{w}z|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2). \tag{1}$$

2) En déduire que, pour tous les nombres complexes z et w dans D, le nombre complexe $\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}$ est aussi dans D.
3) Soit w un élément dans D. On désigne par T_w l'application de D vers D tel que $T_w(z) = \dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}$. Déterminer l'application composée $T_w^2 = T_wT_w$. En déduire que l'application T_w est une bijection.
4) Montrer que, si w est un nombre complexe de valeur absolue 1 et si z est un nombre complexe tel que $z \neq w$, alors le nombre $\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}$ est de valeur absolue 1.
5) (**) Soient w et z deux éléments dans D. En utilisant l'égalité (1), montrer les inégalités suivantes :

$$\frac{|w|-|z|}{1-|wz|} \leq \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \leq \frac{|w|+|z|}{1+|wz|}$$

II. On désigne par $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications telles que

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t)^2 - \mathrm{sh}(t)^2 = 1$.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t)^2 + \mathrm{sh}(t)^2 = \mathrm{ch}(2t)$ et $2\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t) = \mathrm{sh}(2t)$.

3) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \geq 1$. L'application ch est-elle surjective ?

On désigne par $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application telle que, pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on ait $\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. On note en outre, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \qquad \text{et} \qquad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

4) Montrer que, pour tous les nombres complexes z et w, on a $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.

5) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$). Exprimer la valeur absolue de $\exp(z)$ en fonction de x et de y. En déduire que $\exp(z)$ est toujours non-nul.

6) Soit z un nombre complexe arbitraire. Montrer les égalités suivantes :

$$\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1, \qquad \sin(2z) = 2 \sin z \cos z, \qquad \cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2.$$

7) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 0$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\exp(z) + \exp(2z) + \cdots + \exp(nz) = \frac{\exp((n+1)z) - \exp(z)}{\exp(z) - 1}.$$

8) (*) En déduire que, pour tout nombre complexe $z \neq 0$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\sin(z) + \sin(2z) + \cdots + \sin(nz) = \frac{\cos(z/2) - \cos((n + 1/2)z)}{2 \sin(z/2)}.$$

III. Soit $(K, +, *, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un corps commutatif muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. On suppose que, pour tout couple (x, y) d'éléments dans K, on a

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|).$$

On rappelle que dans le cours on a démontré les égalités suivantes :

$$|\mathbf{0}| = 0 \qquad \text{et} \qquad |\mathbf{1}| = 1.$$

On désigne par A le sous-ensemble de K des éléments a tels que $|a| \leq 1$. Enfin, on désigne par $\mathfrak{m}$ le sous-ensemble de K des éléments x tels que $|x| < 1$. Evidemment on a $\mathfrak{m} \subset A$.

1) Montrer que, si x et y sont deux éléments de A, alors $x + y$ et $x * y$ sont encore dans A.

2) Montrer que, si x et y sont deux éléments dans K tels que $|x| \neq |y|$, alors on a $|x + y| = \max(|x|, |y|)$.

3) Expliquer pourquoi $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ sont dans A. Montrer que $(A, +, *, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ est un anneau commutatif.

4) Montrer que, si x et y sont deux éléments dans $\mathfrak{m}$, alors $x + y$ est encore dans $\mathfrak{m}$. En déduire que $(\mathfrak{m}, +, \mathbf{0})$ est un groupe commutatif.

5) Montrer que la relation binaire $\sim$ sur A définie par

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x - y \in \mathfrak{m}$$

est une relation d'équivalence sur A.

6) (***) Montrer que les lois de composition $+$ et $*$ induisent naturellement des lois de compositions (notées encore $+$ et $*$ respectivement) sur l'ensemble quotient $k = A/\sim$ de telle sorte que $(k, +, *, [\mathbf{0}], [\mathbf{1}])$ soit un corps commutatif.