IRS 2007-2008
groupe BMW
Université Paris 8

Nom :______________ Prénom :______________ Numéro d'étudiant :______________

Soient $\mathscr{P} = \{A, B, C, D\}$ un ensemble qui contient quatre variables propositionnelles, $\mathscr{A} = \mathscr{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow,), (\}$. On désigne par $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ l'ensemble des mots à l'alphabet $\mathscr{A}$ et par $\mathscr{F}$ l'ensemble des formules à l'alphabet $\mathscr{A}$. Pour tout mot M dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, on désigne par

— $\mathrm{lg}[M]$ la longueur de M,

— $\mathrm{o}[M]$ le nombre d'occurences de la parenthèse ouvrante (dans M,

— $\mathrm{f}[M]$ le nombre d'occurences de la parenthèse fermante) dans M,

— $\mathrm{n}[M]$ le nombre d'occurences du symbole de négation $\neg$ dans M.

Si F est une formule dans $\mathscr{F}$, on désigne par $\mathrm{h}[F]$ la hauteur de F. Si M est un mot dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ et si $0 \le i \le \mathrm{lg}[M]$ est un entier, on désigne par M_i le segment initial de M de longueur i et par $\mathrm{d}_i[M]$ l'entier $\mathrm{o}[M_i] - \mathrm{f}[M_i]$, on note en outre $\mathrm{d}[M] = \max\limits_{0 \le i \le n} \mathrm{d}_i[M]$.

Exercice (*à répondre directement sur les lignes*)

1) La longueur du mot vide est ______________.

2) Soit F la formule $(\neg((A \Rightarrow B) \vee C) \Leftrightarrow \neg D)$. Déterminer les valeurs suivantes :

$$\mathrm{lg}[F] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{h}[F] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \quad \mathrm{d}[F] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Problème (*à répondre dans des feuilles différentes*)

I. On considère l'argument suivant :

> *Soit Pierre aime Marie, soit Marie aime Pierre. Mais si Marie n'aime pas Pierre, alors Pierre n'est pas content. Une fois Pierre n'est pas content, il n'aime pas Marie. Donc Pierre et Marie s'aiment l'un l'autre.*

On désigne par

$A =$"Pierre aime Marie",

$B =$"Marie aime Pierre",

$C =$"Pierre est content".

1) Exprimer l'argument ci-dessus en une formule propositionnelle F.

2) Déterminer l'arbre de decomposition (sous form simplifiée) de F.

3) L'argument ci-dessus est-il une tautologie ? Pourquoi ?

II. Considérons la formule

$$F = ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (\neg B \wedge C))).$$

1) Déterminer l'arbre de décomposition sous forme simplifiée et la hauteur de la formule F.

2) Déterminer le tableau de valeurs de vérité de F.

3) En déduire la formule sous forme normale disjonctive canonique et la formule sous forme normale conjonctive canonique qui sont logiquement équivalentes à F.

III. Étude de la fonction $\mathrm{d}[\cdot]$.

1) En utilisant un résultat dans le cours, montrer que $\mathrm{d}[F] \geq 0$ pour toute formule $F \in \mathscr{F}$.

2) Soient F et G deux formules et $\alpha \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Exprimer $\mathrm{d}[(F\alpha G)]$ en fonction de $\mathrm{d}[F]$ et de $\mathrm{d}[G]$.

3) Montrer que, pour toute formule F dans $\mathscr{F}$, on a $\mathrm{d}[F] \leq \mathrm{h}[F] \leq \mathrm{d}[F] + \mathrm{n}[F]$.

4) Montrer que, pour toute formule F, il existe une formule G qui est logiquement équivalente à F et telle que $\mathrm{h}[G] \leq \mathrm{d}[F] + 1$.

5) Montrer que, pour tout formule F dans $\mathscr{F}$, on a $\mathrm{o}[F] \leq 2^{\mathrm{d}[F]} - 1$.