SUR LA COMPARAISON ENTRE LES MINIMA ET LES PENTES

Huayi Chen

Résumé. — On étudie la comparaison entre les minima et les pentes successifs d'un fibré vectoriel hermitien sur une courbe arithmétique et démontre un encadrement uniform de leurs différences.

Table des matières

1. Introduction

Les minima et les pentes successifs sont des invariants naturels en géométrie des réseaux euclidiens. Les minima avaient été déjà étudiés dans la théorie classique de Minkowski en géométrie des nombres ; les pentes ont été introduites par Bost [**3**], en s'inspirant de la géométrie des fibrés vectoriels sur une courbe projective (notamment la théorie de Harder-Narasimhan [**12**]), ainsi que les travaux de Stuhler [**15**] et Grayson [**11**] dans le cadre arithmétique. La comparaison entre ces invariants a été étudiée par plusieurs auteurs [**14, 2, 9**] dans divers contextes.

Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Par *fibré vectoriel hermitien* sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ on entend un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang fini E muni d'une famille de normes hermitiennes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\rightarrow\mathbb{C}}$ paramétrée par l'ensemble des plongements du corps K dans $\mathbb{C}$, où $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme hermitienne sur $E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}$. On demande en plus que la donnée des normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}$ soit invariante par la conjugaison complexe. Dans le cas où $K=\mathbb{Q}$ (et donc $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}$), la donnée d'un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est équivalente à celle d'un réseau euclidien. En effet, il y a un unique plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. La restriction de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{Q}\to\mathbb{C}}$ à $E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ donne une norme euclidienne sur ce dernier. Ainsi on peut considérer E comme un réseau euclidien dans $(E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\|\cdot\|_{\mathbb{Q}\to\mathbb{C}})$.

Étant donné un fibré vectoriel hermitien $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, pour tout $i\in\{1,\ldots,\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ *minimum* de $\overline{E}$ (noté $\lambda_i(\overline{E})$) est défini comme l'infimum de l'ensemble des nombres positifs R tels que l'espace vectoriel

$$\operatorname{Vect}_K(\{s\in E\mid \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_\sigma\leqslant R\})$$

est de rang $\geqslant i$ sur K. Dans le cas où $K=\mathbb{Q}$, cela revient à la définition classique des minima successifs à la Minkowski. Pour faciliter la comparaison on introduit la version logarithmique des minima en posant $\nu_i(\overline{E})=-\ln\lambda_i(\overline{E})$. On a alors

$$\nu_1(\overline{E})\geqslant\nu_2(\overline{E})\geqslant\ldots\geqslant\nu_r(\overline{E}),\quad r=\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E).$$

Les pentes successives d'un fibré vectoriel hermitien sont construites d'une façon similaire à la théorie de Harder-Narasimhan en géométrie des fibrés vectoriels sur une courbe projective. À tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}=(E,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}})$ on associe un nombre réel $\widehat{\deg}(\overline{E})$, appelé *degré d'Arakelov* (normalisé), qui est construit comme suit. On fixe une famille $\{s_i\}_{i=1}^r$ d'éléments de E qui forme une base de $E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ sur K (r est donc égal au rang de E sur $\mathcal{O}_K$) et on définit

$$\widehat{\deg}(\overline{E}):=\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\bigg(\ln\#\Big(\Lambda^rE/\mathcal{O}_K(s_1\wedge\cdots\wedge s_r)\Big)-\sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\ln\|s_1\wedge\cdots\wedge s_r\|_\sigma\bigg).$$

Il s'avère que cette définition ne dépend pas du choix de la famille $\{s_i\}_{i=1}^r$.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. On considère l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(F),\widehat{\deg}(\overline{F}))$, où F parcourt l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_K$-modules de E, et dans la structure de fibré vectoriel hermitien de $\overline{F}$ on considère les normes induites. Le bord supérieur de l'enveloppe convexe de cet ensemble est le graphe d'une fonction concave $P_{\overline{E}}$ sur $[0,\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)]$, qui est affine sur chaque intervalle $[i-1,i]$, $i\in\{1,\ldots,\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$. On désigne par $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ la pente de la fonction $P_{\overline{E}}$ sur $[i-1,i]$ (qui est égale à $P_{\overline{E}}(i)-P_{\overline{E}}(i-1)$), appelé $i^{\text{ème}}$ *pente* de $\overline{E}$. Comme la fonction $P_{\overline{E}}$ est concave, on a

$$\widehat{\mu}_1(\overline{E})\geqslant\widehat{\mu}_2(\overline{E})\geqslant\ldots\geqslant\widehat{\mu}_r(\overline{E}),\quad r=\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(\overline{E}).$$

La comparaison entre les minima et les pentes consiste à majorer et minorer la différence $\widehat{\mu}_i(\overline{E})-\nu_i(\overline{E})$ par des termes qui ne dépendent que de K, $\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$

et $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$. On dit qu'un majorant ou un minorant est uniforme s'il ne dépend pas de i. Par l'inégalité de Hadamard, il est facile à montrer que la $i^{\text{ème}}$ pente $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ est toujours minorée par $\nu_i(\overline{E})$ (voir proposition 3.4 et théorème 3.7 pour les détails, cf. [**2**, théorème 1] pour une autre démonstration). En outre, l'inégalité $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) \geqslant \nu_i(\overline{E})$ est optimale, comme montré par les fibrés vectoriels hermitiens triviaux. La majoration de $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})$ est cependant plus subtile. Le meilleur résultat dans la littérature est dû à Borek, ce qui donne (cf. [**2**, théorème 3])

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \frac{i}{\mathrm{rg}(E)} C(\mathrm{rg}(E), K), \tag{1}$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C(n,K) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(n(r_1+r_2)\ln(2) + \frac{n}{2}\ln|\Delta_K| - r_1\ln(v_n) - r_2\ln(v_{2n})\Big),$$

avec

- r_1 et r_2 : les nombres des places réelles et des places complexes de K respectivement,
- Δ_K : le discriminant de K,
- v_m : la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$.

La stratégie de Borek repose sur le deuxième théorème de Minkowski, qui pourrait être considéré comme une comparaison entre la somme des minima (logarithmiques) successifs et le degré d'Arakelov (qui s'identifie à la somme des pentes successives). Dans le langage de la géométrie d'Arakelov, le deuxième théorème de Minkowski s'énonce comme

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) - \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \nu_i(\overline{E}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \big(\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})\big) \leqslant C(\mathrm{rg}(E), K). \tag{2}$$

La méthode de Borek consiste à combiner cette inégalité avec la filtration de Harder-Narasimhan.

Par la formule de Stirling, il n'est pas difficile de montrer que

$$C(n,K) = O(n\ln(n)), \quad n \to +\infty.$$

La somme de l'inégalité (1) pour $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$ donne une majoration de la différence entre le degré d'Arakelov et la somme des minima successifs qui est beaucoup moins bonne que (2), où on multiplie le majorant $C(\mathrm{rg}(E), K)$ par $(\mathrm{rg}(E)+1)/2$. Cela suggère que l'inégalité (1) n'est pas assez précis lorsque i est grand.

Dans cet article on revisite le problème de comparaison entre les minima et les pentes en établissant une majoration uniforme de la différence entre la $i^{\text{ème}}$ pente et le $i^{\text{ème}}$ minima comme suit (cf. théorème 3.7).

Théorème 1.1. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}(E)\}$,*

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}\operatorname{rg}(E)[K:\mathbb{Q}]\Big) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}. \tag{3}$$

Le majorant dans (3) a le même ordre de grandeur que $C(\operatorname{rg}(E), K)/\operatorname{rg}(E)$ quand $\operatorname{rg}(E) \to +\infty$. La nouveauté principale est de découvrir que l'on peut ramener le problème à comparer le dernier minimum à la dernière pente (pente minimale), qui permet d'obtenir une majoration uniforme. Plus précisément, si on désigne par $\delta(n, K)$ la borne supérieure de $\widehat{\mu}_n(\overline{F}) - \nu_n(\overline{F})$, où $\overline{F}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens de rang n sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, alors pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ de rang n sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \delta(n, K). \tag{4}$$

Cette inégalité est obtenue en s'appuyant sur l'approche de $\mathbb{R}$-filtration introduite dans [**8**].

Pour obtenir la majoration (3), on relie la comparaison entre la dernière pente et le dernier minimum au problème de transférence en géométrie des nombres. Pour tout entier $r \geqslant 1$ on désigne par $\mathfrak{d}(r, \mathbb{Q})$ la borne supérieure des $-(\nu_1(\overline{V}^\vee) + \nu_r(\overline{V}))$, où $\overline{V}$ parcourt l'ensemble des réseaux euclidiens de rang r. On établit l'inégalité suivante

$$\delta(n, K) \leqslant \mathfrak{d}(n[K:\mathbb{Q}], \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. L'inégalité (3) s'ensuit via le théorème de transférence à la Banaszczyk (cf. [**1**], Theorem 3.1 (iii)).

L'article est organisé comme suit. Dans le deuxième paragraphe on rappelle la construction des $\mathbb{R}$-filtrations par minima et de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel hermitien sur une courbe arithmétique. Le troisième paragraphe est consacré à démontrer un principe de comparaison général des $\mathbb{R}$-filtrations et en déduire l'inégalité (4). Dans le quatrième paragraphe, on étudie la majoration de la fonction $\delta(\cdot, K)$ et établit le théorème 1.1. Enfin, on conclut l'article par quelques commentaires dans le cinquième paragraphe.

Ce travail est partiellement soutenu par le fond de recherche ANR-14-CE25-0015. Une partie de recherches qui conduisent à cet article sont réalisées à Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR). Je voudrais remercier le centre pour l'hospitalité.

2. $\mathbb{R}$-filtrations associées à un fibré vectoriel hermitien

Le but de ce paragraphe est de rappeler la construction des $\mathbb{R}$-filtrations par minima et par pentes d'un fibré vectoriel hermitien (voir définition 3.1 pour la notion de $\mathbb{R}$-filtration en général). Ces $\mathbb{R}$-filtrations sont des outils pour comparer les minima et les pentes.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, soit $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})$ le sous-espace K-vectoriel de $E_K := E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ engendré par l'ensemble

$$\big\{s\in E\,\big|\,\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s\|_\sigma\leqslant \mathrm{e}^{-t}\big\}.$$

On voit aussitôt que, si t_1 et t_2 sont deux nombres réels tels que $t_1\geqslant t_2$, alors on a $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^{t_1}(\overline{E})\subset\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^{t_2}(\overline{E})$. Autrement dit, la famille $(\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}))_{t\in\mathbb{R}}$ est décroissante. En outre, par définition, pour tout $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, on a

$$\nu_i(\overline{E})=\sup\{u\in\mathbb{R}\,|\,\mathrm{rg}_K(\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^u(\overline{E}))\geqslant i\}.$$

En d'autres termes, pour tout $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$ et tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{rg}_K(\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}))\geqslant i\Longleftrightarrow \nu_i(\overline{E})\geqslant t. \tag{5}$$

Proposition 2.1. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ *et r le rang de E sur $\mathcal{O}_K$.*

(a) Si $t>\nu_1(\overline{E})$, alors $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})=\{0\}$.

(b) Si $t\leqslant\nu_r(\overline{E})$, alors $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})=E_K$.

(c) Pour tout $i\in\{1,\ldots,r-1\}$, les sous-espaces vectoriels de E_K dans la famille $(\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}))_{t\in\,]\nu_{i+1}(\overline{E}),\nu_i(\overline{E})]}$ sont égaux.

Démonstration. — Ce sont des conséquences immédiates de la relation (5). □

Définition 2.2. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul. On désigne par $\nu_{\min}(\overline{E})$ le dernier minimum logarithmique de $\overline{E}$. Par définition, si r est le rang de E sur $\mathcal{O}_K$, alors $\nu_{\min}(\overline{E})=\nu_r(\overline{E})$.

La proposition suivante donne une construction de $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}$ en utilisant $\nu_{\min}$.

Proposition 2.3. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$*. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})=\sum_{\substack{0\neq F\subset E\\ \nu_{\min}(\overline{F})\geqslant t}}F_K,$$

où F parcourt l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_K$-modules non-nuls de E, et dans la structure de fibré vectoriel hermitien de $\overline{F}$ on considère des normes induites.

Démonstration. — Soit F un sous-$\mathcal{O}_K$-module non-nul de E tel que $\nu_{\min}(\overline{F}) > t$. Il existe alors une famille $\{s_i\}_{i=1}^n$ d'éléments de F linéairement indépendants sur K, qui vérifie

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}, \quad \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s_i\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

L'espace vectoriel F_K est donc contenu dans $\mathcal{F}_m^t(\overline{E})$. Réciproquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E}) \neq \{0\}$, il existe des éléments $u_1,\dots,u_k$ dans E qui engendrent $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^t(\overline{E})$ comme espace vectoriel sur K, et tels que

$$\forall\, j \in \{1,\dots,k\}, \quad \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|u_j\|_\sigma \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Soit F le sous-$\mathcal{O}_K$-module de E engendré par $\{u_1,\dots,u_k\}$. Par définition le dernier minimum de $\overline{F}$ est $\geqslant t$. □

Les pentes successives peuvent aussi être décrites par une $\mathbb{R}$-filtration en s'appuyant sur la théorie de Harder-Narasimhan. Cette construction (de $\mathbb{R}$-filtration) a été introduite dans [**8**]. Dans la suite on rappelle la théorie de Harder-Narasimhan pour les fibrés vectoriels hermitiens et la construction de $\mathbb{R}$-filtration de Harder-Narasimhan.

Pour tout fibré vectoriel hermitien non-nul $\overline{E}$, on désigne par $\widehat{\mu}(\overline{E})$ le quotient $\widehat{\deg}(\overline{E})/\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$, appelé la *pente* de $\overline{E}$. Le fibré vectoriel hermitien est dit *semi-stable* si, pour tout sous-$\mathcal{O}_K$-module non-nul F de E, on a $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$. Étant donné un fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, il existe un unique drapeau

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

de sous-$\mathcal{O}_K$-modules de E (appelé *drapeau de Harder-Narasimhan*) qui satisfait aux conditions suivantes (cf. [**3**, §A.3]) :

(1) pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, le $\mathcal{O}_K$-module quotient E_j/E_{j-1} est projectif et, si on le munit des normes sous-quotients, le fibré vectoriel hermitien $\overline{E_j/E_{j-1}}$ est semi-stable ;

(2) les pentes des fibrés vectoriels hermitiens sous-quotients vérifient les inégalités $\widehat{\mu}(\overline{E_1/E_0}) > \ldots > \widehat{\mu}(\overline{E_n/E_{n-1}})$.

Soit $\Delta_{\overline{E}}$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ des points de la forme $(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(F), \widehat{\deg}(\overline{F}))$, où F parcourt l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_K$-module de E. Le bord supérieur de $\Delta_{\overline{E}}$ est le graphe d'une fonction $P_{\overline{E}}$ (définie sur l'intervalle $[0, \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)]$) qui est concave et affine par morceaux. Les abscisses où la fonction $P_{\overline{E}}$ change sa pente sont précisément $\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_1),\dots,\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_{n-1})$, et la valeur de la fonction $P_{\overline{E}}$ en $\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_j)$ est $\widehat{\deg}(\overline{E}_j)$ pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$.

On désigne par $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$ la pente de $\overline{E_n/E_{n-1}}$, qui est la dernière pente parmi les pentes successives de $\overline{E}$ (appelée *pente minimale* de $\overline{E}$). Elle est aussi égale à la plus petite pente des quotients projectifs non-nuls de E munis des normes quotients. On désigne par $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ la pente de $\overline{E}_1$, appelée *pente maximale* de $\overline{E}$. Elle est égale à la plus grande pente des sous-$\mathcal{O}_K$-modules de E munis des normes induites.

Soit $r = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on désigne par $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ la pente de la fonction $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[i-1, i]$. On a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E_j/E_{j-1}}) \text{ si et seulement si } \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_{j-1}) < i \leqslant \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E_j).$$

En outre, on a $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_1(\overline{E})$ and $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_r(\overline{E})$.

Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, et

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n$$

son drapeau de Harder-Narasimhan. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) := \begin{cases} \{0\}, & \text{si } t > \widehat{\mu}(\overline{E_1/E_0}), \\ E_i \otimes_{\mathcal{O}_K} K, & \text{si } \widehat{\mu}(\overline{E_{i+1}/E_i}) < t \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_i/E_{i-1}}),\ i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ E \otimes_{\mathcal{O}_K} K, & \text{si } t \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_n/E_{n-1}}). \end{cases}$$

La proposition suivante, qui est parallèle à la proposition 2.1, résulte directement de la définition de $\mathcal{F}_{\mathrm{HN}}$.

Proposition 2.4. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ *et r le rang de E sur $\mathcal{O}_K$.*

(a) Si $t > \widehat{\mu}_1(\overline{E})$, alors $\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = \{0\}$.

(b) Si $t \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$, alors $\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = E_K$.

(c) Pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, les sous-espaces vectoriels de E_K dans la famille $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}))_{t \in]\widehat{\mu}_{i+1}(\overline{E}), \widehat{\mu}_i(\overline{E})]}$ sont égaux.

(d) Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}_K(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E})) \geqslant i\}$.

Le résultat suivant, qui est parallèle à la proposition 2.3, a été démontré dans [**8**]. On renvoie les lecteurs au corollaire 2.2.3 du *loc. cit.* pour une démonstration.

Proposition 2.5. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur* $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. *On a*

$$\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) = \sum_{\substack{\{0\} \neq F \subset E \\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \geqslant t}} F_K,$$

où F parcourt l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_K$-modules non-nuls de E, et dans la structure de fibré vectoriel hermitien de $\overline{F}$ on considère des normes induites.

3. Comparaison des filtrations

Dans ce paragraphe, on considère le problème suivant. Étant données deux $\mathbb{R}$-filtrations sur le même espace vectoriel de rang fini sur un corps, comment comparer les points de saut de ces deux filtrations ? On démontre un principe formel et l'applique à la comparaison des filtrations par minima et de Harder-Narasimhan.

Définition 3.1. — Soient K un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur K. On appelle $\mathbb{R}$-*filtration sur* V toute famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^t(V))_{t\in\mathbb{R}}$ de sous-espaces K-vectoriels de V paramétrée par $\mathbb{R}$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) (décroissance) pour tout $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, $t_1>t_2$, on a $\mathcal{F}^{t_1}(V)\subset\mathcal{F}^{t_2}(V)$;

(b) (séparation) pour tout $t\in\mathbb{R}$ assez positif, $\mathcal{F}^t(V)=\{0\}$;

(c) (exhaustivité) pour tout $t\in\mathbb{R}$ assez négatif, $\mathcal{F}^t(V)=V$;

(d) (continuité à gauche) la fonction $t\mapsto \mathrm{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))$ est continue à gauche (et donc est localement constante à gauche).

Pour tout $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}_K(V)\}$, on définit

$$Z_{\mathcal{F}}(i) := \sup\{t\in\mathbb{R} \mid \mathrm{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))\geqslant i\}.$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$Z_{\mathcal{F}}(i)\geqslant t \Longleftrightarrow \mathrm{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))\geqslant i. \tag{6}$$

Exemple 3.2. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Les familles $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}))_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}))_{t\in\mathbb{R}}$ sont des $\mathbb{R}$-filtrations de $E_K=E\otimes_{\mathcal{O}_K}K$, comme montré par les propositions 2.1 et 2.4.

Proposition 3.3. — *Soient K un corps et V un espace vectoriel de rang fini sur K. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathbb{R}$-filtrations sur V. On suppose que a est un nombre réel tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on ait $\mathcal{F}^t(V)\subset\mathcal{G}^{t-a}(V)$. Alors on a $Z_{\mathcal{F}}\leqslant Z_{\mathcal{G}}+a$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}(a)$ la $\mathbb{R}$-filtration $(\mathcal{G}^{t-a}(V))_{t\in\mathbb{R}}$. Par définition on a $Z_{\mathcal{G}(a)}=Z_{\mathcal{G}}+a$. Il suffit de démontrer la proposition dans le cas particulier où $a=0$. Par la relation (6), pour tout $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}_K(V)\}$, si $Z_{\mathcal{F}}(i)\geqslant t$, alors $\mathrm{rg}_K(\mathcal{F}^t(V))\geqslant i$, qui implique que $\mathrm{rg}_K(\mathcal{G}^t(V))\geqslant i$ et donc $Z_{\mathcal{G}}(i)\geqslant t$. Ainsi on obtient $Z_{\mathcal{F}}(i)\leqslant Z_{\mathcal{G}}(i)$. □

Proposition 3.4. — *Soit K un corps de nombres. Pour tout fibré vectoriel hermitien non-nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})\geqslant\nu_{\min}(\overline{E})$.*

Démonstration. — Soient $\{s_i\}_{i=1}^r$ une famille d'éléments de E qui forme une base de l'espace vectoriel E_K et tels que

$$\forall\, i\in\{1,\ldots,r\},\quad \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_i\|_\sigma\leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

où t est un nombre réel. Soit G un $\mathcal{O}_K$-module quotient de E qui est projectif. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit α_i l'image canonique de s_i dans G. Sans perte de généralité, on suppose que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ forme une base de G_K. Par définition on a

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\overline{G}) &= \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\ln \#(\det(G)/\mathcal{O}_K(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)) - \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|_\sigma\Big) \\ &\geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|_\sigma \geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|\alpha_i\|_\sigma \\ &\geqslant -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma: K \to \mathbb{C}} \ln \|s_i\|_\sigma \geqslant tn,\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient de l'inégalité d'Hadamard. On obtient donc $\widehat{\mu}(\overline{G}) \geqslant t$. Comme G est arbitraire, on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\overline{E})$. □

Définition 3.5. — Soit r un entier, $r \geqslant 1$. Pour tout corps de nombres K, on désigne par $\delta(r, K)$ la borne supérieure des $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E})$, où $\overline{E}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ qui sont de rang r.

Remarque 3.6. — Soient K un corps de nombres, $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. On a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E} \oplus \overline{F}) = \min(\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}), \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}))$$

et

$$\nu_{\min}(\overline{E} \oplus \overline{F}) \leqslant \min(\nu_{\min}(\overline{E}), \nu_{\min}(\overline{F})).$$

Par conséquent, la fonction $(r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}) \mapsto \delta(r, K)$ est croissante.

Théorème 3.7. — *Soit K un corps de nombres. Pour tout fibré vectoriel hermitien non-nul $\overline{E}$ et tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, on a*

$$\nu_i(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \leqslant \nu_i(\overline{E}) + \delta(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E), K).$$

Démonstration. — D'après les propositions 3.4, 2.5 et 2.3, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{F}^t_{\mathrm{m}}(\overline{E}) \subset \mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E})$. En outre, pour tout sous-$\mathcal{O}_K$-module non-nul F de E, on a (voir la remarque 3.6 pour la deuxième inégalité)

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \leqslant \nu_{\min}(\overline{F}) + \delta(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(F), K) \leqslant \nu_{\min}(\overline{F}) + \delta(\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E), K).$$

Cela montre que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(\overline{E}) \subset \mathcal{F}^{t-\delta(\operatorname{rg}(E),K)}_{\mathrm{m}}(\overline{E}).$$

Donc les inégalités annoncées proviennent de la proposition 3.3. □

4. Comparaison entre la dernière pente et le dernier minimum

Dans le paragraphe précédent, on ramène la comparaison entre les minima successifs et les pentes successives à celle entre le dernier minimum et la pente minimale. On présente ici une majoration de la fonction $\delta(\cdot, K)$ introduite dans la définition 3.5. Grâce au théorème 3.7, cela donne une comparaison explicite et uniforme entre les minima successifs et les pentes successives.

On commence par un lien entre ce problème avec le problème de transférence en géométrie des nombres.

Proposition 4.1. — *Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *On a*

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -(\nu_1(\overline{E}^\vee) + \nu_{\min}(\overline{E}))$$

où $\overline{E}^\vee$ désigne le $\mathcal{O}_K$-module dual de E muni des normes duales.

Démonstration. — Rappelons que le degré d'Arakelov du dual d'un fibré vectoriel hermitien est l'opposé du degré d'Arakelov du fibré vectoriel hermitien. On en déduit $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee)+\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = 0$ (cf. [**4**, (4.2)]). En outre, par le théorème 3.7 on obtient $\nu_1(\overline{E}^\vee) \leqslant \widehat{\mu}_1(\overline{E}^\vee) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee)$, d'où

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) = -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -\nu_1(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E}).$$

□

Définition 4.2. — Soient n un entier, $n \geqslant 1$, et K un corps de nombres. On désigne par $\mathfrak{d}(n, K)$ la borne supérieure des $-\nu_1(\overline{E}^\vee) - \nu_{\min}(\overline{E})$, où $\overline{E}$ parcourt l'ensemble des fibrés vectoriels de rang n sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, et $\overline{E}^\vee$ désigne le $\mathcal{O}_K$-module dual de E muni des normes duales.

La proposition 4.1 conduit naturellement à la comparaison suivante.

Corollaire 4.3. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout corps de nombres K, on a* $\delta(n, K) \leqslant \mathfrak{d}(n, K)$.

L'estimation de l'invariant $\mathfrak{d}(n, K)$ est connue comme l'un des problèmes de transférence dans la littérature. Le cas des réseaux euclidiens (c'est-à-dire $K = \mathbb{Q}$) est étudié par Banaszczyk (cf. [**1**], Theorem 3.1 (iii)) que l'on rappel comme suit.

***Théorème 4.4* (Banaszczyk)**. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on a*

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{Q}) \leqslant \ln\Big(\frac{3n}{2}\Big). \tag{7}$$

Remarque 4.5. — On compare la borne supérieure (7) de $\mathfrak{d}(n,\mathbb{Q})$ à la constante $\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q})$ introduite dans la majoration (1) de Borek. Rappelons que dans le cas où $K=\mathbb{Q}$ on a

$$\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q}) = n\ln(2) - \frac{1}{n}\ln(v_n).$$

Par la formule de Stirling, on obtient (cf. [**5**, §3.2])

$$\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q}) = \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{e\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2n}\ln(\pi n) + \frac{1}{6n^2}\theta(n/2),$$

où θ est une fonction comprise entre 0 et 1. Asymptotiquement quand $n\to+\infty$, $\frac{1}{n}C(n,\mathbb{Q})$ et $\ln(3n/2)$ a le même ordre de grandeur. Cependant la combinaison du théorème 3.7, du corollaire 4.3 et de la borne supérieure (7) montre que, pour tout fibré vectoriel hermitien non-nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et tout $i\in\{1,\ldots,\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(E)\}$, on a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E}) \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}\,\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(E)\Big), \tag{8}$$

où le facteur i n'apparaît pas dans le majorant. Cette inégalité est meilleure que l'estimation de Borek dès que $i\geqslant 8$.

Il semble que la majoration de $\mathfrak{d}(\cdot,K)$ pour un corps de nombres K général n'est pas encore connue dans la littérature. On proposer une variante de la proposition 4.1 qui permet de majorer $\delta(n,K)$ par

$$\mathfrak{d}(n[K:\mathbb{Q}],\mathbb{Q}) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\ln|\Delta_K|.$$

Dans la suite, on fixe un corps de nombres K. On désigne par $\pi:\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K\to\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ le morphisme canonique. Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien, on désigne par $\pi_*(E)$ le groupe abélien sous-jacent à E. Il s'avère que

$$\pi_*(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \cong \bigoplus_{\sigma:K\to\mathbb{C}} E\otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma}\mathbb{C}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme hermitienne $\|\cdot\|$ telle que, pour tout $s=(s_\sigma)_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\in\pi_*(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$, on ait

$$\|s\|^2 = \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}}\|s_\sigma\|_\sigma^2.$$

Soit $\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K,\mathbb{Z})$ le module canonique du corps de nombre K, qui est un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang 1. Il s'avère que l'application de trace $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ est un élément non-nul de $\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}$. On munit $\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}$ de la structure de fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ de sorte que $\|\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\|_\sigma = 1$ pour tout $\sigma:K\to\mathbb{Q}$. On a

$$\widehat{\deg}(\overline{\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}}) = \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}. \tag{9}$$

De plus, pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, on a un isomorphism

$$\pi_*(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}}) \cong \pi_*(\overline{E})^\vee \tag{10}$$

de fibrés vectoriels hermitiens sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ (c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules qui induit une isométrie pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$). On renvoie les lecteurs à [**5**, Proposition 3.2.2] pour une démonstration.

Proposition 4.6. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. *On a*

$$\nu_1(\overline{E}) \geqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E})), \quad \nu_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\pi_*(\overline{E})).$$

Démonstration. — Soit s un élément de E. Par définition, on a

$$\|s\|^2 = \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s\|_\sigma^2 \geqslant \max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s\|_\sigma^2.$$

Soit $\lambda > 0$. si s est un élément non-nul de E tel que $\|s\| \leqslant \lambda$, alors pour tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$ on a $\|s\|_\sigma \leqslant \lambda$. On obtient donc $\nu_1(\overline{E}) \geqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E}))$. Similairement, si $\{s_1, \ldots, s_n\}$ est une base de $\pi_*(E)$ sur $\mathbb{Z}$ telle que $\|s_i\| \leqslant \lambda$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors on a $\|s_i\|_\sigma \leqslant \lambda$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $\sigma : K \to \mathbb{C}$. On peut donc soustraire une sous-famille $(s_i)_{i\in I}$ de $\{s_1, \ldots, s_n\}$ qui forme une base de E_K sur K telle que $\max_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \|s_i\|_\sigma \leqslant \lambda$. On en déduit donc $\nu_{\min}(\overline{E}) \geqslant \nu_{\min}(\pi_*(\overline{E}))$. □

Proposition 4.7. — *Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, on a*

$$\delta(n, K) \leqslant \mathfrak{d}([K : \mathbb{Q}]n, \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]}. \tag{11}$$

Démonstration. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien de rang n sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. D'après la proposition 4.6, on a

$$-\nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant -\nu_{\min}(\pi_*(\overline{E})) \leqslant \nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee) + \mathfrak{d}(n[K : \mathbb{Q}], \mathbb{Q}),$$

où la deuxième inégalité provient de la définition de la fonction $\mathfrak{d}(\cdot, \mathbb{Q})$. Par (10) on obtient

$$\nu_1(\pi_*(\overline{E})^\vee) = \nu_1(\pi_*(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}})) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}}),$$

où l'inégalité provient de la proposition 4.6. D'après [**3**, (A.2)], on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee) + \widehat{\deg}(\overline{\omega_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}}) = -\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]},$$

où la deuxième égalité provient de (9) et [**4**, (4.2)]. On en déduit

$$\mu_{\min}(\overline{E}) - \nu_{\min}(\overline{E}) \leqslant \mathfrak{d}([K : \mathbb{Q}]n, \mathbb{Q}) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

La proposition est donc démontrée. □

Corollaire 4.8. — *Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ et tout corps de nombres K, on a*

$$\delta(n, K) \leqslant \ln\Big(\frac{3}{2}n[K:\mathbb{Q}]\Big) + \frac{\ln|\Delta_K|}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de (7) et (11). □

5. Commentaires

5.1. Divers minimas. — Il existe d'autres notions de minima successifs dans la littérature. Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Pour tout $s \in E_K$, on définit

$$\widehat{\deg}(s) := -\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\bigg(\sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spm}(\mathcal{O}_K)} \ln\|s\|_{\mathfrak{p}} + \sum_{\sigma:K\to\mathbb{C}} \ln\|s\|_{\sigma}\bigg),$$

où pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ sur $E\otimes_{\mathcal{O}_K} K_{\mathfrak{p}}$ ($K_{\mathfrak{p}}$ étant le complété de K par rapport à la place $\mathfrak{p}$) est induite par la structure de $\mathcal{O}_K$-module de E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ minimum de Roy-Thunder de $\overline{E}$ (cf. [**13**]) est défini comme

$$\nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}_K(\operatorname{Vect}_K\{s \in E_K \mid \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}) \geqslant i\}.$$

On peut aussi définir de façon similaire le degré d'Arakelov pour les vecteurs non-nuls dans $E\otimes_{\mathcal{O}_K} K^{\mathrm{a}}$, où K^{a} désigne la clôture algébrique de K. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)\}$, le $i^{\text{ème}}$ minimum absolu de $\overline{E}$ est défini comme

$$\nu_i^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}_{K^{\mathrm{a}}}(\operatorname{Vect}_{K^{\mathrm{a}}}\{s \in E_{K^{\mathrm{a}}} \mid \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}) \geqslant i\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$\nu_i(\overline{E}) \leqslant \nu_i^{\mathrm{RT}}(\overline{E}) \leqslant \nu_i^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E})$$

pour tout i. Ainsi l'encadrement de $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i(\overline{E})$ conduit à une comparaison entre les pentes successives et divers minima successifs. Il est aussi possible d'étendre les résultats de cet article dans le cadre adélique, suivant le chemin indiqué dans [**9**, §5.4]. Il faut cependant tenir en compte le défaut de pureté et le défaut de hermitienité dans la majoration (voir [**10**, §2] pour plus de détails).

5.2. Lien avec le problème de transférence général. — Soient K un corps de nombres et $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Soit $r = \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_K}(E)$. En général, un problème de transférence cherche à majorer $-(\nu_i(\overline{E})+\nu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee))$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Si

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_{n-1} \subsetneq E_n = E$$

est le drapeau de Hader-Narasimhan de $\overline{E}$, alors

$$0 = (E/E_n)^\vee \subsetneq (E/E_{n-1})^\vee \subsetneq \ldots \subsetneq (E/E_1)^\vee \subsetneq (E/E_0)^\vee = E^\vee$$

est le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}^\vee$. En particulier, on a

$$\mu_i(\overline{E}) + \mu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. On en déduit

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}, \quad -(\nu_i(\overline{E}) + \nu_{r+1-i}(\overline{E}^\vee)) \leqslant 2\delta(r, K).$$

En particulier, on a $\mathfrak{d}(r, K) \leqslant 2\delta(r, K)$.

5.3. Interprétation géométrique. — Si on se contente de majorer la différence entre les pentes et les minima absolus, on peut transformer le problème dans un cadre géométrique. Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Tout élément non-nul s de $E_{K^{\mathrm{a}}}$ détermine une droite dans l'espace vectoriel $E_{K^{\mathrm{a}}}$, qui correspond à un point algébrique du schéma $\mathbb{P}(E_K^\vee)$ que l'on note P_s. En outre, on a

$$\widehat{\deg}(s) = -h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P_s),$$

où la hauteur (absolue) $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}$ est calculée par rapport au modèle entier $(\mathbb{P}(E^\vee), \mathcal{O}_{E^\vee}(1))$ et les métriques de Fubini-Study sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^\vee)}(1)$.

Rappelons que le *minimum essentiel* de la fonction de hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}$ est définie comme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E}^\vee) = \sup_{Z \subsetneq \mathbb{P}(E_K^\vee)} \inf_{P \in (\mathbb{P}(E_K^\vee) \setminus Z)(K^{\mathrm{a}})} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(P),$$

où Z parcourt l'ensemble des parties fermées Zariski strictes de $\mathbb{P}(E_K^\vee)$. Il s'avère que

$$\nu_{\min}^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) + \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E}^\vee) \geqslant 0.$$

On conjecture que le minimum essentiel $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{E}^\vee)$ est majoré par la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee)$ plus $\frac{1}{2}\ln(\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E))$. Cette conjecture est vraie lorsque $\overline{E}$ est une somme directe orthogonale de fibrés en droites hermitiens (cf. [**7**]). Cela conduit à la majoration

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) - \nu_i^{\mathrm{abs}}(\overline{E}) \leqslant \frac{1}{2}\ln(\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(E))$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, en utilisant la méthode proposée dans cet article (il suffit de remplacer la $\mathbb{R}$-filtration par minima par la $\mathbb{R}$-filtration par hauteur, cf. [**6**, §3.2]).

Plus généralement, on peut considérer le problème suivant. Soient $f : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre $\mathscr{X}$ vers $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit ample, que $\mathscr{L}$ soit relativement nef et que les métriques de $\overline{\mathscr{L}}$ soient semi-positive. La donnée de $\overline{\mathscr{L}}$ permet de définir une fonction de hauteur (logarithmique et absolue) $h_{\overline{\mathscr{L}}}(\cdot)$

sur l'ensemble des points algébrique de $\mathscr{X}_K$. Soit $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$ le minimum essentiel associé à cette fonction de hauteur, définie comme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}}) := \sup_{Z \subsetneq \mathscr{X}_K} \inf_{P \in (\mathscr{X}_K \setminus Z)(K^{\mathrm{a}})} h_{\overline{\mathscr{L}}}(P)$$

On conjecture que le minimum essentiel $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$ peut être majoré par la limite

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\max}(f_*(\overline{\mathscr{L}^{\otimes n}}))}{n}$$

plus une fonction du degré de $\mathscr{L}_K$. On revoie les lecteurs dans [**8**, §4.2] pour une étude sur l'invariant $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\cdot)$.

Références

[1] W. Banaszczyk – « Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattices in $\mathbf{R}^n$ », *Discrete & Computational Geometry. An International Journal of Mathematics and Computer Science* **13** (1995), no. 2, p. 217–231.

[2] T. Borek – « Successive minima and slopes of Hermitian vector bundles over number fields », *Journal of Number Theory* **113** (2005), no. 2, p. 380–388.

[3] J.-B. Bost – « Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

[4] ———, « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques* (2001), no. 93, p. 161–221.

[5] J.-B. Bost & K. Künnemann – « Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers », *Advances in Mathematics* **223** (2010), no. 3, p. 987–1106.

[6] S. Boucksom & H. Chen – « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compos. Math.* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.

[7] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. Sombra – « Successive minima of toric height functions », *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **65** (2015), no. 5, p. 2145–2197.

[8] H. Chen – « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série* (2010), no. 120, p. 116.

[9] E. Gaudron – « Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. Mathematical Journal of the University of Padua* **119** (2008), p. 21–95.

[10] ———, « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no. 2, p. 159–182.

[11] D. R. Grayson – « Reduction theory using semistability », *Commentarii Mathematici Helvetici* **59** (1984), no. 4, p. 600–634.

[12] G. Harder & M. S. Narasimhan – « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves », *Mathematische Annalen* **212** (1974/75), p. 215–248.

[13] D. Roy & J. L. Thunder – « An absolute Siegel's lemma », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]* **476** (1996), p. 1–26.

[14] C. Soulé – « Hermitian vector bundles on arithmetic varieties », in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 383–419.

[15] U. Stuhler – « Eine Bemerkung zur Reduktionstheorie quadratischer Formen », *Archiv der Mathematik* **27** (1976), no. 6, p. 604–610.

---

27 juillet 2017

Huayi Chen, Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, Bâtiment Sophie Germain, Boîte Courrier 7012, 75205 Paris Cedex 13
E-mail : `huayi.chen@imj-prg.fr` • *Url :* `webusers.imj-prg.fr/~huayi.chen`