

Corollaire X un CW-complexe, entier $n \geq 0$.

Supposons que X a un nombre fini c_n de n -cellules. Alors, $b_n(X) \leq c_n$, où $b_n(X)$ est le n -ème nombre de Betti de X .

Nombres de Betti Y espace topologique, $i \geq 0$.

On suppose que le groupe $H_i(Y)$ est de type fini:

$$H_i(Y) \cong \mathbb{Z}^r \oplus A, \text{ où } A \text{ est un groupe fini.}$$

Le nombre r est le i -ème nombre de Betti de Y .

Exercice Soit X un CW-complexe fini. Alors,

$$\sum_n (-1)^n b_n(X) = \sum_n (-1)^n c_n.$$

La somme alternée $\sum_n (-1)^n b_n(X)$ s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de X .

Exemple de calcul de groupes d'homologie

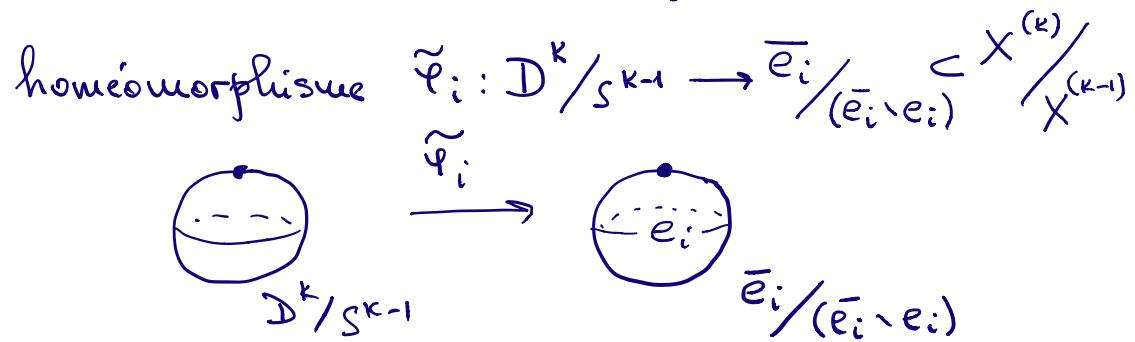
$$\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C}^0$$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2n}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2n-2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \underset{0}{\mathbb{Z}}$$

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ et } k \text{ est pair,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Coefficient d'incidence de cellules

$\varphi_i : D^k \rightarrow X$ application caractéristique
d'une cellule e_i



Degré d'une application continue $f : S^n \rightarrow S^n$

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(S^n)$$

$$\begin{matrix} \cong \\ \mathbb{Z} \end{matrix} \xrightarrow{x \mapsto} \begin{matrix} \cong \\ \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Cet entier d s'appelle le degré de f .

Orientations des cellules

Pour chaque k -cellule, il y a deux classes d'équivalence d'applications caractéristiques.

$$\begin{aligned} \psi, \tilde{\psi} : D^k &\rightarrow X \\ (\tilde{\psi})^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k / S^{k-1} &\xrightarrow{\cong} S^k \quad \text{homéomorphisme} \\ &\quad \text{(de degré } \pm 1\text{)} \end{aligned}$$

Coefficient d'incidence $[\sigma : \tau]$ est le degré
de l'application

$$\ell_i|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow X^{(k-1)} \rightarrow X^{(k-1)} /_{\substack{X^{(k-2)} \cup \tau' \\ \tau' \neq \tau}} \simeq \overline{\tau} /_{(\bar{\tau} - \tau)} \rightarrow S^{k-1}.$$

Pour que ce degré soit correctement défini
(et pas seulement défini à signe près), il faut
fixer une manière pour choisir des générateurs
des groupes

- $\tilde{H}_k(S^k)$, où S^k est le bord de D^k , $k \geq 0$,
- $\tilde{H}_k(S^k)$, où $S^k = D^k / S^{k-1}$, $k \geq 0$.

Proposition Soit σ une k -cellule, où $k \geq 1$. Alors,

$$\partial_k \sigma = \sum_{\tau} \pm [\sigma : \tau] \tau.$$

§ 3. Groupes d'homologie simpliciale

- K -simplexe (affine) dans \mathbb{R}^n

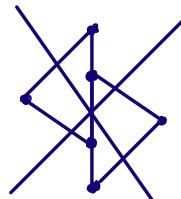
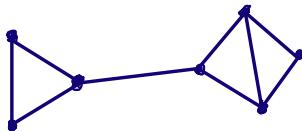
Enveloppe convexe de $K+1$ points affinement indépendants.

- complexe simplicial géométrique dans \mathbb{R}^n

C'est une collection K de simplexes dans \mathbb{R}^n telle que

- toute face d'un simplexe de K est dans K ;
- l'intersection de deux simplexes quelconques de K est leur face commune;
- la collection K est localement finie.

Support $|K|$ de K .



Soit X un complexe simplicial (fini).

On numérote tous les sommets de X .

Pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k -simplexe σ^k de X , on a l'homéomorphisme $T^k \rightarrow \sigma^k$ qui préserve l'ordre des sommets.

On obtient un CW-complexe (fini),

dont les cellules sont orientées,

et on peut considérer ses groupes d'homologie cellulaire.

Proposition Pour tout k -simplexe σ^k de X , on a

$$\partial \sigma^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k),$$

où $\Gamma_i(\sigma^k)$ est la i -ème face de codimension 1 de σ^k .

Complexe de chaînes classique de X
et groupes d'homologie simpliciale de X .

§4. Homologie avec des coefficients différents de \mathbb{Z} et cohomologie

Coefficients arbitraires G un groupe abélien

X un espace topologique, $k \geq 0$ un entier.

Une k -chaîne singulière de X à coefficients dans G est une combinaison formelle finie

$$\sum_i g_i \sigma_i,$$

où $g_i \in G$ et σ_i est un k -simplexe singulier de X .

Complexe $C(X; G)$ de chaînes singulières de X
à coefficients dans G .

Groupes d'homologie $H_k(X; G)$ à coefficients dans G .

Groupes d'homologie réduits.

Groupes d'homologie relatifs.

Groupes de cohomologie G un groupe abélien

X un espace topologique, $k \geq 0$ un entier.

Une k -cochaîne singulière de X à coefficients dans G est une fonction qui associe à tout k -simplexe singulier de X un élément de G .

$$C^k(X; G) = \text{Hom}(C_k(X), G)$$

Complexe $C^\bullet(X; G)$ des k -cochaînes singulières de X à coefficients dans G :

$$\dots \xleftarrow{\delta_3} C^2(X; G) \xleftarrow{\delta_2} C^1(X; G) \xleftarrow{\delta_1} C^0(X; G)$$

$$\text{On pose } (\delta_k c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{k+1}))$$

pour toute k -cochaîne singulière c de X à coefficients dans G et pour tout $(k+1)$ -simplexe singulier σ de X .

Si $a \in C_{k+1}(X)$, on a

$$\langle \delta_k c, a \rangle = \langle c, \partial_k a \rangle.$$

En particulier, $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

Groupes de cohomologie $H^k(X; G)$ de X à coefficients dans G .

Cocycles et cobords.

Pour obtenir un complexe augmenté dans le cas de cochaînes, on considère le morphisme

$$\varepsilon': C^0(X; G) \leftarrow G$$

qui à tout élément $g \in G$ associe l'application constante g (sur les 0-simplexes singuliers de X).

Groupes de cohomologie relatifs $H^k(X, A; G)$

Suites exactes longues.

Formules des coefficients universels

Considérons un complexe de chaînes

$$C: \dots \xrightarrow{\partial} C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0,$$

où $C_i, i \geq 0$, sont des groupes abéliens libres.

Application $h: H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C); G)$.

Si $\alpha \in H^n(C; G)$ est représenté par un morphisme

$\varphi: C_n \rightarrow G$ tel que $\delta \varphi = 0$. On a $\varphi \circ \partial = 0$,

donc φ s'annule sur $B_n \subset C_n$.

La restriction $\varphi_0 = \varphi|_{Z_n}$ induit un morphisme

$\bar{\varphi}_0: H_n(C) = Z_n / B_n \rightarrow G$ qui est un élément de $\text{Hom}(H_n(C); G)$.

Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant φ :

si $\psi \in \text{Im } \delta$, on a $\psi = \delta \varphi = \varphi \circ \partial$,

donc ψ est nul sur Z_n .

Lemme Le morphisme h est surjectif.

Démonstration La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\delta} B_{n-1} \rightarrow 0$$

est scindée. Donc, il existe une projection
 $p: C_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$. Par conséquent, on peut étendre
les morphismes définis sur \mathbb{Z}_n à C_n .

Dans le cas d'un morphisme qui s'annule sur B_n ,
on obtient un élément de $\ker \delta$. Ceci donne

$$\text{Hom}(H_n(C); G) \rightarrow \ker \delta \xrightarrow{\text{pr}} H^n(C; G).$$

En composant ce morphisme avec h , on obtient
l'identité.

□

Suite exacte courte scindée :

$$0 \rightarrow \ker h \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C); G) \rightarrow 0$$

Diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z_{n+1} & \rightarrow & C_{n+1} & \rightarrow & B_n & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \circ & & \downarrow \partial & & \downarrow \circ & \\ 0 & \rightarrow & Z_n & \rightarrow & C_n & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow 0 \end{array}$$

Les suites horizontales courtes sont scindées.

On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & Z_{n+1}^* & \leftarrow & C_{n+1}^* & \leftarrow & B_n^* & \leftarrow 0 \\ & & \uparrow \circ & & \uparrow \delta & & \uparrow \circ & \\ 0 & \leftarrow & Z_n^* & \leftarrow & C_n^* & \leftarrow & B_{n-1}^* & \leftarrow 0 \end{array}$$

(Ici, $A^* = \text{Hom}(A, G)$.)

La suite exacte longue :

$$\dots \leftarrow B_n^* \xleftarrow{i_n^*} Z_n^* \leftarrow H^n(C; G) \leftarrow B_{n-1}^* \leftarrow Z_{n-1}^* \leftarrow \dots$$

où $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$. On obtient

$$0 \leftarrow \ker i_n^* \leftarrow H^n(C; G) \leftarrow \text{Coker } i_{n-1}^* \leftarrow 0$$

On a $\ker i_n^* \simeq \text{Hom}(H_n(C), G)$, car $\ker i_n^*$ est formé des morphismes $Z_n \rightarrow G$ qui s'annulent sur B_n .

L'application $H^n(C; G) \rightarrow \ker i_n^*$ s'identifie avec h .

La suite exacte courte

$$0 \rightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow 0$$

peut être vue comme résolution libre de $H_{n-1}(C)$.

En dualisant, on obtient

$$0 \leftarrow B_{n-1}^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}^* \leftarrow \text{Hom}(H_{n-1}(e), G) \leftarrow 0$$

Donc, $\text{Ext}(H_{n-1}(e), G) \simeq \text{Coker } i_{n-1}^*$.

Rappel Si $\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$ est une résolution libre de H , on a un complexe de chaînes

$$\dots \leftarrow F_2 \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Les groupes d'homologie de ce complexe de chaînes ne dépendent pas du choix de résolution libre.

Théorème (Formule des coefficients universels)

pour la cohomologie)

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(e), G) \rightarrow H^n(e; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(e), G) \rightarrow 0$$

Exercice

- $\text{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$.
- $\text{Ext}(H, G) = 0$ si H est libre.
- $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$.

Corollaire Si les groupes $H_n(e)$ et $H_{n-1}(e)$ sont de type fini, alors

$H^n(C; \mathbb{Z}) \simeq (H_n(e)/\text{Tors } H_n(e)) \oplus \text{Tors } H_{n-1}(e)$,
 où $\text{Tors } H_n(e)$ et $\text{Tors } H_{n-1}(e)$ sont les sous-groupes de torsion de $H_n(e)$ et $H_{n-1}(e)$, respectivement.

Théorème (Formule des coefficients universels pour l'homologie)

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow H_n(e) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(e), G) \rightarrow 0$$

Si $F: \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} H \rightarrow 0$

est une résolution libre de H , on a
 un complexe de chaînes $\widetilde{F} \otimes G$:

$$\dots \rightarrow F_2 \otimes G \xrightarrow{\underline{F_1 \otimes G}} F_1 \otimes G \rightarrow H \otimes G \rightarrow 0$$

On pose $\text{Tor}(H, G) = H_1(\widetilde{F} \otimes G)$.

Exercice • $\text{Tor}(A, B) \simeq \text{Tor}(B, A)$.

- $\text{Tor}(A \oplus A', B) \simeq \text{Tor}(A, B) \oplus \text{Tor}(A', B)$.
- $\text{Tor}(A, B) = 0$ si A (ou B) est libre.
- $\text{Tor}(A, B) = \overline{\text{Tor}(\text{Tors } A, B)}$.
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \ker(A \xrightarrow{x^n} A)$.