$$\theta^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

définie par

$$\theta^*(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(\theta_*(X_1), \dots, \theta_*(X_p)),$$

où $X_1, \dots, X_p$ sont des vecteurs tangents à M en $x \in M$ (si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a $\theta^*(f) = f \circ \theta$).

Ici, $\theta_*(X)(f) = X(f \circ \theta)$ pour tout vecteur tangent X à M en x.

On a $\theta^*(f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = (f \circ \theta)\, d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_p \circ \theta)$.

L'application θ^* induit un morphisme

$$H^\bullet_\Omega(N) \longrightarrow H^\bullet_\Omega(M) \text{ d'algèbres graduées.}$$

Intégration de formes différentielles

Le support d'une forme $\omega \in \Omega^p(M)$ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$.

Si ω est une n-forme différentielle sur un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ à support compact, on peut étendre ω à $\mathbb{R}^n$ (par 0) avec le support dans un cube.

Si $\omega = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (où f est à support compact), on pose

$$\int_W \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\dots} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Si $W' \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et
$\Theta : W' \to W$ est un difféomorphisme,
alors

$$\Theta^*(\omega) = (f \circ \Theta)\, d(x_1 \circ \Theta) \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \Theta)$$

et

$$\int_{W'} \Theta^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \Theta^*(\omega) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

(formule de changement de variables).

Si M est orientée et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$
est une carte locale d'un atlas orienté,
considérons une n-forme $\omega \in \Omega^n(M)$ dont
le support est contenu dans U. On pose

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega .$$

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix
d'une carte locale (de l'atlas orienté).

Pour une forme arbitraire $\omega \in \Omega^n(M)$, on procède
par une partition de l'unité:

- $f_i \geq 0$ des fonctions lisses;
- le support de f_i est contenu dans le domaine de définition U_i d'une carte locale, et $\{U_i\}_i$ forment un recouvrement localement fini de M;
- $\sum_i f_i = 1$.

Tout compact $K \subset M$ touche un nombre fini d'ouverts U_i. On pose

$$\int \omega = \sum_i \int f_i \omega .$$

Si $\{g_j\}$ est une autre partition de l'unité, on a

$$\sum_{i,j} f_i g_j = 1 .$$

Donc,

$$\sum_i \int f_i \omega = \sum_i \sum_j \int f_i g_j \omega = \sum_j \int g_j \omega .$$

Si $\theta : M \to N$ est un difféomorphisme de variétés orientées qui préserve l'orientation, on a

$$\int_N \omega = \int_M \theta^* \omega$$

pour toute n-forme $\omega \in \Omega^n(N)$ à support compact.

Relations avec la cohomologie singulière

Introduisons d'abord la notion d'une variété topologique à bord.

<u>Déf.</u> Une variété topologique de dimension n à bord (où $n \geq 1$ est un entier) est un espace topologique M t.q.

- tout point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$;
- M est séparé;
- M possède une base dénombrable.

L'ensemble ∂M des points de M qui possède un voisinage ouvert homéomorphe à

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$$

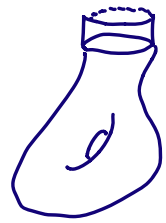
et qui correspondent sous cette identification à un point de l'hyperplan $x_1 = 0$ s'appelle le bord de M.

<u>Remarques</u> (1) Si $x \in \partial M$, alors x ne possède pas de voisinage (dans M) homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. En effet, si $U \ni x$ est un voisinage de x dans M, on a $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\})$, d'après le théorème d'excision.

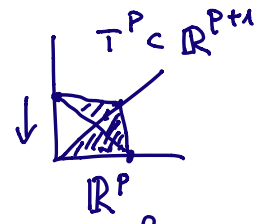
(2) L'espace topologique ∂M est une variété topologique de dimension $n-1$ (sans bord).

Variétes lisses à bord.

Intégration de formes sur une variété lisse à bord.



Soit M une variété lisse de dimension n.
On se restreint aux simplexes singuliers lisses $\sigma : T^p \to M$, et on considère T^p (et toutes ses faces) comme simplexe orienté.



Soit $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\sigma : T^p \to M$ un simplexe singulier lisse (défini sur un voisinage ouvert de $T^p \subset \mathbb{R}^p$). Alors, $\sigma^* \omega$ est une p-forme sur (un voisinage ouvert de) T^p.

On pose $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{T^p} \sigma^* \omega$ (on omet des détails techniques concernant le $(p-2)$-squelette de T^p).

Pour une p-chaîne $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma \in C_p^{lisse}(M)$, on pose

$$\int_c \omega = \sum_\sigma n_\sigma \int_\sigma \omega .$$

On obtient un morphisme

$$\psi^p : \Omega^p(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_p^{lisse}(M), \mathbb{R}) = C^p_{lisse}(M; \mathbb{R})$$

donné par $\psi^p(\omega)(c) = \int_c \omega$,

et un morphisme de complexes de (co)chaînes.

C'est un corollaire du théorème de Stokes :

si M est une variété lisse orientée avec le bord ∂M et $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ est une $(n-1)$-forme à support compact, alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

On note $H^p_{lisse}(M)$ les groupes d'homologie de $C^\bullet_{lisse}(M; \mathbb{R})$.

<u>Théorème de de Rham</u> Le morphisme induit

$$\psi^* : H^p_\Omega(M) \longrightarrow H^p_{lisse}(M)$$

est un isomorphisme pour tout entier $p \geq 0$.

Deux séries de résultats.

- Dans le cadre de simplexes singuliers lisses : suites exactes longues, suite de Mayer-Vietoris (pour sous-ensembles ouverts), calcul pour les espaces contractiles.
- Résultats similaires pour la cohomologie de de Rham.

- <u>Lemme de Poincaré</u> Le théorème de de Rham est vrai pour tout sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$.

- <u>Analogue de la suite de Mayer-Vietoris</u>

$U, V \subset M$ deux ouverts.

Suite exacte courte

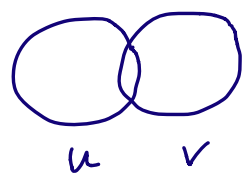
$$0 \to \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{-} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{+} \Omega^p(U \cap V) \to 0$$

Pour montrer la surjectivité de la deuxième application, considérons une p-forme ω sur $U \cap V$.

On peut utiliser une partition de l'unité pour trouver une fonction lisse

$$f : U \cup V \to \mathbb{R}$$

qui est 0 sur un voisinage de $U \setminus V$ et 1 sur un voisinage de $V \setminus U$.



On a une décomposition

$$\omega = f\omega + (1-f)\omega.$$

Les formes $f\omega$ et $(1-f)\omega$ peuvent être prolongées (par 0) sur U et V, respectivement.

Le diagramme suivant est commutatif (ici $\mathcal{U} = \{U, V\}$):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^p(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "i^* \circ \psi"] & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \arrow[r] \arrow[d, "\psi \oplus \psi"] & \Omega^p(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^p_{\mathcal{U},\text{lisse}}(U \cup V; \mathbb{R}) \arrow[r] & C^p_{\text{lisse}}(U; \mathbb{R}) \oplus C^p_{\text{lisse}}(V; \mathbb{R}) \arrow[r] & C^p_{\text{lisse}}(U \cap V; \mathbb{R}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On obtient la suite de Mayer-Vietoris et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p_\Omega(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_\Omega(U)\oplus H^p_\Omega(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^p_\Omega(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+1}_\Omega(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^p_{lisse}(U\cup V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p_{lisse}(U;\mathbb{R})\oplus H^p_{lisse}(V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^p_{lisse}(U\cap V;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{p+1}_{lisse}(U\cup V;\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Corollaire</u> Si ψ^* est un isomorphisme pour U, V et $U\cap V$ (pour tout p), il est aussi pour $U\cup V$.

- <u>Lemme</u> Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que ψ^* soit un isomorphisme pour tout U_i. Alors, ψ^* est un isomorphisme pour $\bigcup_{i\in I} U_i$.

C'est un corollaire du calcul des groupes de cohomologie (dans le cas singulier et dans le cas de de Rham) et la naturalite de ψ^*.

Lemme (local-global pour les ouverts)

Soit $P(A)$ une affirmation à propos de sous-ensembles ouverts $A \subset M$ d'une variété topologique (lisse) M de dimension n. Supposons que

(i) si A est homéomorphe (difféomorphe) à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $P(A)$ est vraie;

(ii) si $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont vraies pour certains ouverts A et B de M, alors $P(A \cup B)$ est aussi vraie;

(iii) si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une collection d'ouverts de M deux à deux disjoints et $P(A_i)$ est vraie pour tout $i \in \mathcal{I}$, alors $P(\bigcup_i A_i)$ est aussi vraie.

Alors, $P(U)$ est vraie pour tout ouvert $U \subset M$.

<u>Démonstration</u> Par (i) et (ii), l'affirmation $P(U)$ est vraie pour toute réunion finie U d'ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ (pour l'instant, on considère le cas $M \subset \mathbb{R}^n$).

Soit $f : M \to [0, +\infty)$ une fonction propre.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$K_n = f^{-1}([n, n+1]).$$

On peut recouvrire le compact K_n par une réunion finie $U_n \subset f^{-1}(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$ d'ouverts convexes.

Toutes les affirmations $P(U_n)$ sont vraies.

On pose $U = \bigcup_{n \text{ pair}} U_n$ et $V = \bigcup_{n \text{ impair}} U_n$.

On déduit de (iii) que $P(U)$ et $P(V)$ sont vraies. De plus,

$$U \cap V = \bigcup_{i,j} (U_{2i} \cap U_{2j+1}).$$

Les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints, et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes.

Donc, $P(U \cap V)$ est vraie.

Par conséquent, $P(M) = P(U \cup V)$ est aussi vraie.

L'énoncé est, donc, démontré pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

En remplaçant les expressions ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ dans le raisonnement présenté par ouvert de $\mathbb{R}^n$, on obtient l'énoncé demandé. $\square$

Ceci termine la demonstration du théorème de de Rham.

L'isomorphisme obtenu $\psi^* : H^p_{\Omega}(M) \to H^p_{lisse}(M;\mathbb{R})$ peut être composé avec un isomorphisme $H^p_{lisse}(M;\mathbb{R}) \to H^p(M;\mathbb{R})$.

L'inclusion $C^{lisse}_{\bullet}(M) \hookrightarrow C_{\bullet}(M)$ induit un morphisme de complexes de (co)chaînes $C^{\bullet}(M;G) \longrightarrow C^{\bullet}_{lisse}(M;G)$ pour tout groupe abélien G.

On peut utiliser le lemme local-global pour les ouverts pour démontrer que le morphisme induit $H^p(M;G) \longrightarrow H^p_{lisse}(M;G)$ est un isomorphisme pour tout entier $p \geq 0$ (isomorphisme de G-modules si G est un anneau commutatif).

Dualité de Poincaré pour la cohomologie de de Rham

Soit M une variété lisse compacte de dimension n.
Dans cette situation, tous les groupes de cohomologie de de Rham de M sont de dimension finie.
Supposons, en plus, que M est orientée.

On considère l'application bilinéaire (pour tout entier $0 \leq k \leq n$)

$$H^k_\Omega(M) \times H^{n-k}_\Omega(M) \longrightarrow H^n_\Omega(M) \quad \text{(cup produit)}$$

et la forme bilinéaire

$$\int : H^k_\Omega(M) \times H^{n-k}_\Omega(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$.

<u>Théorème (dualité de Poincaré)</u>

La forme bilinéaire $\int$ est non dégénérée.

<u>Démonstration</u>

On peut vérifier les hypothèses du lemme local-global pour les ouverts dans le cas de notre affirmation.

<u>Corollaire</u> Le morphisme

$$H^k_\Omega(M) \longrightarrow (H^{n-k}_\Omega(M))^*,$$

fournit par la forme bilinéaire $\int$, est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

Si la variété M n'est pas compacte, on note $\Omega^k_c(M)$ l'espace de k-formes différentielles à support compact sur M.

Complexe

$$\Omega^0_c(M) \xrightarrow{d} \Omega^1_c(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Groupes $H^k_{\Omega,c}(M)$ de cohomologie de de Rham de M à support compact.

Si M est une variété lisse orientée (de dim. n), on a la forme bilinéaire (pour tout entier $0 \leq k \leq n$)

$$\int : H^k_{\Omega}(M) \times H^{n-k}_{\Omega,c}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $([\omega],[\eta]) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$

(remarquons que la forme $\omega \wedge \eta$ est à support compact).

Le morphisme

$$H^k_{\Omega}(M) \longrightarrow (H^{n-k}_{\Omega,c}(M))^*,$$

fournit par la forme bilinéaire $\int$,
est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k \leq n$
(on ne démontre pas cet énoncé ici).