Au niveau de groupes d'homologie/cohomologie, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^{\ell}(X;R) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi\cup"] & \mathrm{Hom}_R(H_{\ell}(X;R), R) \arrow[d, "(\cap\varphi)^*"] \\ H^{k+\ell}(X;R) \arrow[r, "h"] & \mathrm{Hom}_R(H_{k+\ell}(X;R), R) \end{tikzcd}$$

Si les morphismes h sont des isomorphismes (par exemple, R est un corps ou $R=\mathbb{Z}$ et les groupes d'homologie de X sont libres), alors, on obtient que, au niveau des groupes d'homologie/cohomologie, les morphismes $\varphi\cup$ et $\cap\varphi$ sont duaux.

Soit R un anneau commutatif unitaire, et M une variété topologique compacte (sans bord) R-orientable et R-orientée de dimension n.

On a la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} H^k(M;R) \times H^{n-k}(M;R) &\longrightarrow R \\ (\varphi,\psi) &\longmapsto (\varphi\cup\psi)[M]. \end{aligned}$$

(Les R-modules qui apparaissent ici sont de type fini.)

<u>Rappel</u> Soient E et F deux R-modules libres. Une forme bilinéaire $b : E \times F \to R$ est dite <u>non dégénérée</u> si les morphismes associés

$$E \to \mathrm{Hom}_R(F, R) \quad \text{et} \quad F \to \mathrm{Hom}_R(E, R)$$

sont injectifs.

Si R est un corps et E, F sont des espaces vectoriels sur R de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

- b est non dégénérée,
- le premier morphisme associé est un isomorphisme,
- le deuxième morphisme associé est un isomorphisme.

Si E et F sont des R-modules libres, on dit que b est <u>unimodulaire</u> si les deux morphismes associés sont des isomorphismes.

<u>Théorème (Dualité de Poincaré)</u>

(1) Si R est un corps, la forme bilinéaire

$$H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) \to R \text{ est non dégénérée}$$

pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

(2) Si $R = \mathbb{Z}$, la forme bilinéaire

$$H^k(M)/_{\mathrm{Tors}} \times H^{n-k}(M)/_{\mathrm{Tors}} \to \mathbb{Z}$$

est unimodulaire pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

<u>Démonstration</u> Considérons l'application composée

$$H^{n-k}(M;R) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_R(H_{n-k}(M;R),R) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_R(H^k(M;R),R).$$

Ce morphisme composé envoie $\psi \in H^{n-k}(M;R)$ sur le morphisme $\varphi \mapsto \psi([M]\frown\varphi) = (\varphi\smile\psi)[M]$.

Si R est un corps (ou si $R=\mathbb{Z}$ et on passe au quotient par la torsion), le morphisme h est un isomorphisme. Donc, sous ces hypothèses, le morphisme composé est un isomorphisme.
On montre que l'autre morphisme associé est un isomorphisme en utilisant la (anti) commutativité du cup produit. $\square$

Soit M une variété topologique compacte (sans bord) orientable (et orientée) de dimension $n=4k$.
On obtient la forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\begin{aligned} H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \times H^{2k}(M;\mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q}. \\ (\varphi,\psi) &\longmapsto (\varphi\smile\psi)[M] \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique associée (le nombre de carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs) s'appelle la <u>signature de M</u> (notation : $\sigma(M)$).

§4. Autres formes de dualité

Dualité pour les variétés à bord.

Soit M une variété topologique à bord. On pose $n = \dim M$.
Supposons que M est compacte et R-orientable.

Classe fondamentale relative $[M] \in H_n(M, \partial M; R)$

Le bord ∂M de M admet un voisinage ouvert (dans M) homéomorphe à $\partial M \times [0,1)$.

On identifie ce voisinage avec $\partial M \times [0,1)$.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on a un isomorphisme naturel

$$H_n(M, \partial M; R) \simeq H_n(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon); R).$$

Donc, une R-orientation de M donne une classe

$$[M] \in H_n(M, \partial M; R).$$

L'image de cette classe par le morphisme habituel

$$H_n(M, \partial M; R) \longrightarrow H_{n-1}(\partial M; R) \text{ est } [\partial M] \in H_{n-1}(\partial M; R).$$

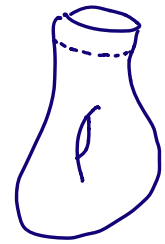
Théorème (Isomorphisme de Poincaré pour les variétés à bord)

Supposons que le bord ∂M d'une variété topologique M (à bord) compacte, R-orientable de dimension n est présenté comme réunion disjointe $\partial M = A \amalg B$, où A et B sont des réunions de composantes connexes de ∂M. Alors,

$$D_M : H^k(M, A; R) \longrightarrow H_{n-k}(M, B; R)$$
$$\varphi \longmapsto [M] \cap \varphi$$

est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

<u>Démonstration</u> Considérons le cas $B = \emptyset$. On a



M

$$H^k(M, \partial M; R) \simeq H^k_c(M \setminus \partial M; R) \text{ et}$$
$$H_{n-k}(M; R) \simeq H_{n-k}(M \setminus \partial M; R).$$

On peut utiliser le théorème d'isomorphisme de Poincaré.

Dans le cas général, on a le diagramme commutatif (à signe près) :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^k(M,\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "{[M]\cap}"] & H^k(M,A) \arrow[r] \arrow[d, "{[M]}"] & H^k(\partial M, A) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^{k+1}(M,\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "{[M]\cap}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k}(M,B) \arrow[r] & H^k(B) \arrow[d, "{[B]\cap}"] & & \\
 & & & H_{n-k-1}(B) \arrow[r] & H_{n-k-1}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(On ne précise pas l'anneau R des coefficients)

On utilise le lemme des cinq. $\square$

Soit M une variété topologique (sans bord) de dimension n. Supposons que M est compacte et orientable.

Soit $K \subset M$ un "bon" compact.

<u>Théorème</u> On a $H_m(M, M \setminus K) \simeq H^{n-m}(K)$ pour tout entier $0 \leq m \leq n$.

<u>Démonstration</u> Soit $K \subset U$ un voisinage ouvert.
On a le diagramme commutatif (à signe près)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_m(M\setminus K) \arrow[r] & H_m(M) \arrow[r] & H_m(M, M\setminus K) \arrow[r] & H_{m-1}(M\setminus K) \arrow[r] & \cdots \\
& H^{n-m}(M\setminus K, U\setminus K) \arrow[u] \arrow[d, phantom, "\wr"] & & H_m(U, U\setminus K) \arrow[u, phantom, "\wr"] & H^{n-m+1}(M\setminus K, U\setminus K) \arrow[u] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-m}(M, U) \arrow[r] & H^{n-m}(M) \arrow[r] \arrow[uu, "{[M]\cap}"] & H^{n-m}(U) \arrow[r] \arrow[u] & H^{n-m+1}(M, U) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(La classe fondamentale $[M]$ de M est représentée par un cycle qui est la somme d'une chaîne dans $M\setminus K$ et une chaîne dans U représentant des éléments de $H_n(M\setminus K, U\setminus K)$ et $H_n(U, U\setminus K)$, respectivement ; ce sont les éléments utilisés pour définir les flèches correspondantes du diagramme)

On considère des voisinages ouverts de plus en plus petits et on passe à la limite inductive.
La première flèche verticale devient l'isomorphisme de Poincaré $H_c^{n-m}(M\setminus K) \simeq H_m(M\setminus K)$.
On obtient un isomorphisme

$$H_m(M, M\setminus K) \xleftarrow{\sim} \varinjlim H^{n-m}(U).$$

Sous certaines hypothèses sur K (un "bon" compact), on a $\varinjlim H^{n-m}(U) \simeq H^{n-m}(K)$. $\square$

Version plus générale

M variété topologique orientable de dim. n

$\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$ une orientation, G un groupe abélien.

Si $L \subset K \subset M$ sont des sous-ensembles compacts, on pose

$$\check{H}^m(K, L; G) = \varinjlim \{ H^m(U, V; G) \mid (U,V) \supset (K, L),\ U, V \text{ ouverts} \}$$

(ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie de Čech).

Si K et L sont raisonnables (par exemple, CW-complexes ou variétés topologiques), ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie singulière correspondants.

On a un cap produit

$$\left[\frac{C_n(V) + C_n(U \setminus L)}{C_n(U \setminus K)} \right] \times C^m(U, V; G) \longrightarrow C_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G)$$

donné par $(b + c) \cap f = b \cap f + c \cap f = c \cap f$.

On a

$$H_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G) \simeq H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$$

$$H_n\left(\frac{C_\cdot(V) + C_\cdot(U \setminus L)}{C_\cdot(U \setminus K)} \right) \simeq H_n(U, U \setminus K) \simeq H_n(M, M \setminus K)$$

(car $\{V, U \setminus L\}$ est un recouvrement ouvert de U).

On obtient un cap produit

$$H_n(M, M \setminus K) \times H^m(U, V; G) \to H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Pour tout compact $K' \supset K$, on peut considérer la classe $\mu_{K'} = \mu_M|_{K'} \in \Gamma(K', \tilde{M}_{\mathbb{Z}}) \simeq H_n(M, M \setminus K')$,

et on a un morphisme

$$\mu_{K'} \cap : H^m(U, V; G) \longrightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Il est défini par

$$[f] \mapsto \gamma \cap [f] = [c \cap f] \in H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G),$$

où $\gamma \in H_n(M, M \setminus K')$ est représenté par $b + c + d \in C_n(V) + C_n(U \setminus L) + C_n(M \setminus K)$.

En passant à la limite inductive, on obtient le morphisme

$$\mu \cap : \check{H}^m(K, L; G) \longrightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

<u>Théorème (Poincaré - Alexander - Lefschetz)</u>

Le morphisme

$$\mu \cap : \check{H}(K, L; G) \longrightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$$

est un isomorphisme pour tout entier $0 \leq m \leq n$.

Démonstration Le cas $L = \emptyset$ a été déjà (essentiellement) considéré.

Le cas général peut être déduit du cas $L = \emptyset$ à l'aide du diagramme commutatif (à coefficients dans G)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \check{H}^m(K,L) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^m(K) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^m(L) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^m(K,L) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-m}(M\setminus L, M\setminus K) \arrow[r] & H_{n-m}(M, M\setminus K) \arrow[r] & H_{n-m}(M, M\setminus L) \arrow[r] & H_{n-m-1}(M\setminus L, M\setminus K) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(La commutativité du diagramme est un exercice.) $\square$

Corollaire (Dualité d'Alexander)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact. Alors,

$$\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \check{H}^{n-i-1}(K; G)$$

pour tout entier $0 \leq i \leq n-1$.

Démonstration On a

$$\check{H}^{n-i-1}(K; G) \simeq H_{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G).$$

$\square$

Théorème Soit F un corps, N une variété topologique compacte orientée de dimension $2n+1$ à bord connexe $M = \partial N$. Alors,

$$\dim H^n(M;F) \text{ est paire et}$$
$$\dim \ker(i_*: H_n(M;F) \to H_n(N;F))$$
$$= \dim \operatorname{Im}(i^*: H^n(N;F) \to H^n(M;F)) = \frac{1}{2} \dim H^n(M;F),$$

où $i: M \hookrightarrow N$ est l'inclusion.

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \operatorname{Im} i^*$, on a $\alpha \cup \beta = 0$.

Démonstration On a le diagramme commutatif (à signe près)

$$\begin{tikzcd}
H^n(N;F) \arrow[r, "i^*"] & H^n(M;F) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\simeq"', "{[M]\cap}"] & H^{n+1}(N,M;F) \arrow[d, "\simeq"', "{[N]\cap}"] \\
& H_n(M;F) \arrow[r, "i_*"] & H_n(N;F)
\end{tikzcd}$$

On a $[M] \cap \operatorname{Im} i^* = [M] \cap \ker \delta^* = \ker i_*$.

Donc,

$$\operatorname{rank} i^* = \dim \operatorname{Im} i^* = \dim \ker i_* = \dim H^n(M) - \operatorname{rank} i_*.$$

Par conséquent,

$$\dim H^n(M;F) = 2 \operatorname{rank} i^* = 2 \dim \ker i_*.$$

Si $\alpha', \beta' \in H^n(N;F)$, alors

$$\delta^*(i^*(\alpha') \cup i^*(\beta')) = \delta^* i^*(\alpha' \cup \beta') = 0.$$

De plus, $\delta^*: H^{2n}(M;F) \to H^{2n+1}(N,M;F)$ est injectif, car ce morphisme est Poincaré-dual à $i_*: H_0(M;F) \to H_0(N;F)$. $\square$

<u>Corollaire (Thom)</u> Soit N une variété topologique compacte orientable de dimension $4k+1$ à bord connexe $M = \partial N$. Alors, $\sigma(M) = 0$.

<u>Démonstration</u> On pose $\dim H^{2k}(M;\mathbb{Q}) = 2m$. Notons r le nombre de carrés positifs de la forme bilinéaire

$$H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \times H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi \cup \psi)[M].$$

D'après le théorème précedent, l'espace $H^{2k}(M;\mathbb{Q})$ contient un sous-espace totalement isotrope de dimension m. Donc, $r = 2m - r = m$. $\square$

On dit que deux variétés compactes M_1 et M_2 (de même dimension n) sont cobordantes s'il existe une variété compacte à bord (de dimension $n+1$) dont le bord est homéomorphe à la réunion disjointe de M_1 et M_2.
Une variété compacte M est dite cobordante à zéro, si elle est cobordante à l'ensemble vide, c'est-à-dire, s'il existe une variété compacte à bord dont le bord est homéomorphe à M.

Toute variété compacte de dimension 1 est cobordante à zéro.
Toute surface topologique compacte orientable (sans bord) est cobordante à zéro.
Le plan projectif réel n'est pas cobordant à zéro (on peut facilement montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte cobordante à zéro est paire).

Deux variétés compactes orientées M_1 et M_2 sont cobordantes (en tant que des variétés orientées) s'il existe une variété compacte orientée à bord dont le bord peut être identifié avec $\overline{M}_1 \amalg M_2$, où $\overline{M}_1$ est la variété M_1 munie de l'orientation opposée à celle qui a été choisie.
Une variété compacte orientée est dite cobordante à zéro (en tant qu'une variété orientée) s'il existe une variété compacte orientée à bord dont le bord peut être identifié avec M.

Le corollaire ci-dessus donne une condition nécessaire pour qu'une variété compacte connexe orientable (sans bord) de dimension $4k$ soit le bord d'une variété compacte orientable.

Par exemple, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ n'est pas cobordante à zéro dans le sens orienté (on peut vérifier que la signature $\sigma(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2)$ de $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ est égale à 2).
On peut montrer que $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ est cobordante à zéro dans le sens non orienté : il existe une variété compacte de dimension 5 dont le bord est homéomorphe à $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'autre part, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ (de signature 0) est cobordante à zéro dans le sens orienté.

Pour les variétés compactes <u>lisses</u>, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro peut être formulée en termes de certaines classes caractéristiques, qui s'appellent classes de Stiefel-Whitney.

De façon similaire, pour les variétés compactes lisses orientées, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro dans le sens orienté peut être formulée en termes de classes de Stiefel-Whitney et de classes de Pontryagin.

Quelques commentaires concernant variétés topologiques / variétés lisses

Soit M une variété topologique fermée (c'est-à-dire, compacte sans bord) simplement connexe orientée de dim. 4. On vérifie facilement que tous les groupes d'homologie $H_i(M)$ de M et tous les groupes de cohomologie $H^i(M)$ de M sont sans torsion. D'après la dualité de Poincaré, la forme bilinéaire symétrique (fournie par le cup produit)

$$b_M : H^2(M) \times H^2(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est unimodulaire. Supposons que la forme b_M est paire (c'est-à-dire, $b_M(\alpha,\alpha) = 0 \bmod 2$ pour tout $\alpha \in H^2(M)$).

<u>Théorème (Arf)</u> Soit $E \simeq \mathbb{Z}^r$ un groupe abélien libre de type fini, et soit $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{Z}$ une forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire. Alors, la signature de b est divisible par 8.

Inversement, pour tout nombre entier s divisible par 8, il existe une forme bilinéaire symétrique (à valeurs entières) unimodulaire paire dont la signature est égale à s. On peut construire une telle forme, à l'aide de l'opération de la somme directe, à partir des formes $\pm E_8$.