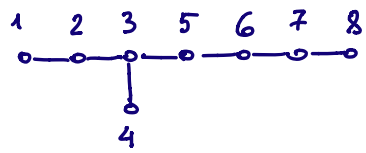
Ici, E_8 est la forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire définie positive de rang 8 dont la matrice de Gram dans une certaine base est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & 0 & & & \\ & & -1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



($-E_8$ est la forme E_8 dont toutes les valeurs sont multipliées par -1).

Il existe une variété topologique fermée simplement connexe orientée N de dimension 4 (appelée E_8-variété de Freedman) dont la forme bilinéaire b_N est isomorphe à E_8.

<u>Théorème (Rokhlin)</u> Si M est une variété <u>lisse</u> fermée simplement connexe orientée de dimension 4, et si la forme bilinéaire b_M est paire, alors la signature $\sigma(M)$ de M est divisible par 16.

Par conséquent, la E_8-variété de Freedman n'admet pas de structure lisse.

§5. Théorie des intersections

Soit M une variété topologique (à bord) de dimension n.
On suppose que M est compacte, orientable (et orientée).

On note $D : H^{n-i}(M) \to H_i(M, \partial M)$ et
$D : H^{n-i}(M, \partial M) \to H_i(M)$
les isomorphismes de Poincaré.

On définit le produit d'intersection

$$\bullet : H_i(M) \times H_j(M) \longrightarrow H_{i+j-n}(M),$$
$$\bullet : H_i(M, \partial M) \times H_j(M) \longrightarrow H_{i+j-n}(M),$$
$$\bullet : H_i(M, \partial M) \times H_j(M, \partial M) \to H_{i+j-n}(M, \partial M)$$

par
$$\begin{aligned} a \bullet b &= D(D^{-1}(b) \cup D^{-1}(a)) \\ &= [M] \cap (D^{-1}(b) \cup D^{-1}(a)) \\ &= ([M] \cap D^{-1}(a)) \cap D^{-1}(b) \\ &= a \cap D^{-1}(b). \end{aligned}$$

On a $\quad a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c,$

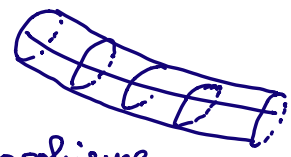
$$a \bullet b = (-1)^{(n - \deg(a))(n - \deg(b))} b \bullet a.$$

Classe de Thom et isomorphisme de Thom

N variété topologique (sans bord) compacte et orientée.

$\pi : W \to N$ fibré en k-disques fermés :

tout point $x \in N$ admet un voisinage ouvert $U \ni x$ et un homéomorphisme $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times D^k \subset U \times \mathbb{R}^k$, compatible avec les projections sur U,



tels que, pour deux ouverts arbitraires U et V trivialisant π et tout point $y \in U \cap V$, l'homéomorphisme $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{\{y\} \times D^k} : \{y\} \times D^k \to \{y\} \times D^k$ soit linéaire.

Supposons que W est orientée.

On voit N comme sous-variété de W (la section zéro $i : N \hookrightarrow W$).

<u>Définition</u> La classe de Thom du fibré π est $\tau = D_W^{-1}(i_*[N]) \in H^k(W, \partial W)$.

De façon équivalente, $[W] \cap \tau = i_*[N]$.

On peut voir τ comme élément de

$$H^k(W, W \setminus N) \simeq H^k(W, \partial W).$$

<u>Définition (Hopf-Freudenthal)</u>

M, N variétés compactes (à bord) orientées de dimensions m, n

$f : (N, \partial N) \to (M, \partial M)$ application continue

On considère les morphismes

$f^! : H^{n-p}(N) \longrightarrow H^{m-p}(M)$

$f^! : H^{n-p}(N, \partial N) \longrightarrow H^{m-p}(M, \partial M)$

définis par

$$f^! = D_M^{-1} f_* D_N .$$

De façon similaire, on a

$f_! : H_{m-p}(M) \longrightarrow H_{n-p}(N)$

$f_! : H_{m-p}(M, \partial M) \longrightarrow H_{n-p}(N, \partial N)$

définis par

$$f_! = D_N f^* D_M^{-1} .$$

On appelle $f^!$ et $f_!$ des morphismes de transfert.

<u>Théorème (Isomorphismes de Thom)</u>

Si $\pi : W \to N$ est un fibré en k-disques sur une variété fermée orientée de dimension n, alors on a les isomorphismes de Thom pour tout entier $0 \leq p \leq n$:

- $H^p(N) \xrightarrow[\simeq]{\pi^*} H^p(W) \xrightarrow[\simeq]{\cup \tau} H^{p+k}(W, \partial W)$
  qui coïncide avec $i^!$,
- $H_{p+k}(W, \partial W) \xrightarrow[\simeq]{\cap \tau} H_p(W) \xrightarrow[\simeq]{\pi_*} H_p(N)$
  qui coïncide avec $i_!$.

<u>Démonstration</u> Les morphismes $i^!$ et $i_!$ sont des isomorphismes. On a (pour $\alpha \in H^p(W)$ et $\beta = i^*(\alpha)$)

$$\begin{aligned} i^!(\beta) &= D_W^{-1}\, i_* D_N(\beta) \\ &= D_W^{-1}\, i_*([N] \cap i^*(\alpha)) \\ &= D_W^{-1}(i_*[N] \cap \alpha) \\ &= D_W^{-1}(([W] \cap \tau) \cap \alpha) \\ &= D_W^{-1}([W] \cap (\alpha \cup \tau)) \\ &= \alpha \cup \tau = \pi^*(\beta) \cup \tau. \end{aligned}$$

Calcul similaire pour $i_!$ $\square$

Supposons que N est connexe.
Soit $A \subset N$ fermé. On pose $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$ et $\partial\tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$.

<u>Lemme</u> On a $\check{H}^p(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) = 0$ pour tout entier $0 \leq p < k$.

<u>Démonstration</u> On utilise le lemme local-global pour les compacts. $\square$

<u>Lemme</u> Si $A = \{x\}$, où $x \in N$, alors la restriction $\tau_x \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$ de τ est un générateur (dans ce cas, $(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \simeq (D^k, S^{k-1})$).

<u>Démonstration</u> Supposons que $\tau_x = 0$ pour certain $x \in N$. Dans ce cas, il existe un voisinage de x tel que $\tau_y = 0$ pour tout point y de ce voisinage. Puisque N est connexe, on obtient que $\tau_y = 0$ pour tout point $y \in N$.

Soit $P_N(A)$ l'affirmation
" la restriction $\tau_A \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$ de τ est nulle "
où $A \subset N$ est fermé.
Si $A \subset U$ est un sous-ensemble fermé et convexe d'un certain ouvert euclidien $U \subset N$, alors $P(A)$ est vraie.
Pour (ii) du lemme local-global pour les compacts, on peut utiliser le diagramme commutatif suivant (de type de Mayer-Vietoris) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^k(W, \partial W) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(W, \partial W) \oplus H^k(W, \partial W) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \check{H}^k(\tilde{A} \cup \tilde{B}, \partial(\tilde{A} \cup \tilde{B})) \arrow[r] & \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \oplus \check{H}^k(\tilde{B}, \partial\tilde{B})
\end{tikzcd}$$

Pour (iii) du lemme, on peut utiliser le fait que le passage à la limite inductive commute avec la considération de groupes $\check{H}$.
Donc, le lemme implique que $P_N(N)$ est vraie, ce qui contredit $\tau \neq 0$.

Si $\tau_x \neq 0$ est divisible dans $H^k(D^k, S^{k-1}) \simeq \mathbb{Z}$ par un premier nombre p, alors on peut changer le groupe des coefficients pour $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. $\square$

<u>Corollaire</u> Si N est connexe, la classe $\tau \in H^k(W, \partial W)$ est l'unique (à signe près) classe dont la restriction sur chaque fibre de π est un générateur.

<u>Démonstration</u> Le cup produit avec τ donne l'isomorphisme de Thom

$$H^0(N) \simeq H^0(W) \longrightarrow H^k(W, \partial W).$$

Donc, $\tau \in H^k(W, \partial W) \simeq \mathbb{Z}$ est un générateur. $\square$

<u>Théorème d'isomorphisme de Thom</u>

Pour tout sous-ensemble compact $A \subset N$, l'application $\pi^*(.) \cup \tau_A : \check{H}^p(A) \longrightarrow \check{H}^{p+k}(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$ est un isomorphisme.

Démonstration - exercice (on peut, à nouveau, utiliser le lemme local-global pour les compacts). $\square$

Soient, maintenant, N et W des variétés <u>lisses</u> compactes orientées de dimensions n et $n+k$, respectivement, et soit $i : N \hookrightarrow W$ un plongement lisse (N est sans bord; W peut avoir un bord non vide, disjoint de $i(N)$).

On pose $[N]_W = i_*[N]$ et $\tau_N^W = D_W^{-1}([N]_W) \in H^k(W)$.

(Ici, $D_W^{-1} : H_n(W, \partial W) \longrightarrow H^k(W)$.)

La classe τ_N^W (qui s'appelle aussi <u>classe de Thom</u>) est l'image de la classe de Thom du fibré normal ν_N^W en k-disques de N dans W:

$$H^k(\text{tube}, \partial\,\text{tube}) \simeq H^k(W, W \setminus \text{tube}) \longrightarrow H^k(W).$$

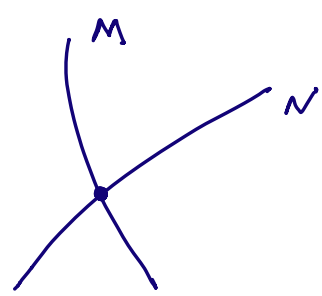
On a

$$[W] \cap \tau_N^W = [N]_W. \qquad (*)$$

Considérons, maintenant, deux sous-variétés lisses orientées M et N (de dimensions m et n) de W. Alors,

$$\begin{aligned}[M]_W \bullet [N]_W &= ([W] \cap \tau_M^W) \bullet ([W] \cap \tau_N^W) \\ &= [W] \cap (\tau_N^W \cup \tau_M^W).\end{aligned}$$

Supposons que $M \pitchfork N$ (et $M \cap N$ est connexe).



On a $\nu_{M\cap N}^N = \nu_M^W\big|_{M\cap N}$

De plus, τ_M^W se restreint à $\tau_{M\cap N}^N$, car la propriété de fournir (par restriction) un générateur (du groupe de cohomologie relatif correspondant) pour chaque fibre caractérise la classe de Thom (à signe près).

Par conséquent (on choisit une orientation de $M \cap N$ de façon appropriée),

$$\tau^N_{M\cap N} = i^*(\tau^W_M). \qquad (**)$$

<u>Théorème</u> Si M et N sont deux sous-variétés lisses (fermées) orientées (de dimensions m et n, respectivement) d'une variété lisse fermée orientée W telles que $M \pitchfork N$, alors

$$\tau^W_{M\cap N} = \tau^W_M \smile \tau^W_N,$$

où, de façon équivalente,

$$[M\cap N]_W = [N]_W \bullet [M]_W.$$

<u>Démonstration</u> On a

$$\begin{aligned}
[M\cap N]_W &= (i^W_{M\cap N})_*[M\cap N] = (i^W_N)_*(i^N_{M\cap N})_*[M\cap N] \\
&= (i^W_N)_*([N]\cap \tau^N_{M\cap N}) && (\text{par } (*)) \\
&= (i^W_N)_*([N]\cap (i^W_N)^*\tau^W_M) && (\text{par } (**)) \\
&= (i^W_N)_*[N]\cap \tau^W_M && (\text{naturalité du cap produit}) \\
&= ([W]\cap \tau^W_N)\cap \tau^W_M && (\text{par } (*)) \\
&= [W]\cap(\tau^W_M \smile \tau^W_N) \\
&= [N]_W \bullet [M]_W. && \square
\end{aligned}$$

<u>Exemple d'une classe caractéristique : classe d'Euler</u>

Soit $N \xhookrightarrow{i_N^W} W$ un plongement lisse, où N est une variété lisse fermée orientée de dimension n, et W est une variété lisse compacte orientée de dimension $n+k$.

La classe d'Euler du fibré normal de N dans W est

$$e_N^W = (i_N^W)^*(\tau_N^W) \in H^k(N).$$

Le cas général d'un fibre vectoriel (de rang fini) de base N peut être réduit à ce cas de fibré normal.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^k(W, W \setminus \text{tube}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^k(W) \ni \tau_N^W \arrow[d] & \\
H^k(\text{tube}, \partial\,\text{tube}) \arrow[r] & H^k(\text{tube}) \simeq H^k(N) & \\
\tau \in H^k(\text{tube}, \partial\,\text{tube}) & & e_N^W \in H^k(N)
\end{tikzcd}$$

Si le rang k du fibré est strictement plus grand que n, le groupe $H^k(N)$ est trivial, donc $e_N^W = 0$.

<u>Proposition</u> S'il existe une section continue s du fibré normal de N dans W telle que s ne s'annule pas, alors $e_N^W = 0$.

<u>Démonstration</u> Une telle section s fournit une application continue $s' : N \to \partial\,\text{tube}$ telle que la composition de s' avec la projection sur N soit l'identité. Donc, la deuxième application dans la suite exacte

$$H^*(\text{tube}, \partial\,\text{tube}) \to H^*(\text{tube}) \to H^*(\partial\,\text{tube})$$

est injective.

Par conséquent, la première application est nulle. $\square$

On peut vérifier que

- si M est une variété lisse fermée orientée de dim. n, on peut parler de la classe d'Euler (dans $H^n(M)$) du fibré tangent de M, et l'évaluation en $[M]$ de cette classe d'Euler est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M.

- si $\pi : W \to N$ est un fibré lisse en k-disques fermés, où N est une variété lisse fermée orientée et W est orientée, et si $s : N \to W$ est une section lisse telle que $s(N)$ intersecte la section zéro N transversalement, alors la classe Poincaré-duale de la classe $[s(N) \cap N]_N$ coïncide avec la classe d'Euler du fibré.