Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2022 - 2023

Topologie algébrique des variétés II : classes caractéristiques

Exercices, feuille 1 : Fibrés vectoriels et classes de Stiefel-Whitney

Exercice 1 Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{S}^n$ la sphère unité $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot x = 1\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, où $\cdot$ est le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(1) Soit $n \geq 0$ un entier. Montrer que le fibré normal de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est trivial.

(2) Soit $m \geq 0$ un entier impair. Montrer que $\mathbb{S}^m$ admet un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.

(3) Soit $k \geq 2$ un entier pair. Montrer que $\mathbb{S}^k$ n'est pas parallélisable.

Exercice 2 Soit B un espace topologique et soient $\xi : E \to B$ et $\xi' : E' \to B$ deux fibrés vectoriels de base B tels qu'il existe une application continue $f : E \to E'$ qui, pour tout point $b \in B$, envoie de façon isomorphe la fibre F_b de ξ au-dessus de b sur la fibre F'_b de ξ' au-dessus de b. Montrer que f est un homéomorphisme (et, par conséquent, les fibrés vectoriels ξ et ξ' sont isomorphes).

Exercice 3 Soit X un espace topologique paracompact.

(1) Montrer que tout fibré vectoriel de base X peut être muni d'une métrique euclidienne.

(2) Montrer que tout fibré vectoriel $\xi : E \to X$ est isomorphe à son fibré dual $\mathrm{Hom}(\xi, \varepsilon^1_X)$, où $\varepsilon^1_X : X \times \mathbb{R} \to X$ est le fibré trivial défini par $\varepsilon^1_X(x, \lambda) = x$ pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Soient ξ et η deux fibrés vectoriels. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$w_k(\xi \times \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \times w_{k-i}(\eta).$$

Exercice 5 Soit $n \geq 1$ un entier. On écrit $n + 1$ sous la forme $n + 1 = 2^r m$, où $r \geq 0$ est entier et m est un entier impair. Supposons que $\mathbb{RP}^n$ admette k champs de vecteurs tels que, en tout point de $\mathbb{RP}^n$, les vecteurs de ces champs de vecteurs soient linéairement indépendants. Montrer que $k < 2^r$.

Exercice 6 Soit $k \geq 1$ un entier. On dit qu'une variété différentiable M *admet un champ de k-plans* si le fibré tangent de M a un sous-fibré vectoriel de dimension k.

(1) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ admet un champ de 1-plans si et seulement si n est impair.

(2) Montrer que $\mathbb{RP}^4$ et $\mathbb{RP}^6$ n'admettent pas de champ de 2-plans.

Exercice 7 (1) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété différentiable de dimension n. Supposons que M admette une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que, pour tout entier $i \geq 0$, la classe $w_i(M)$ est égale à $w_1(M) \smile \ldots \smile w_1(M)$, où le nombre de facteurs est égal à i.

(2) Soit $k \geq 1$ un entier. Supposons que $\mathbb{RP}^n$ admette une immersion dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que n est de la forme $2^r - 1$ ou $2^r - 2$, où $r \geq 1$ est un entier.