Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2021 - 2022
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Contrôle continu

Jeudi 21 octobre 2021

Durée 1h30

Téléphones portables sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Dans tous les exercices, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit E la direction de $\mathcal{E}$. Considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi}$ son application linéaire associée.

(a) Supposons que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est injective. Peut-on affirmer que φ est injective ? Peut-on affirmer que φ est surjective ?

(b) Supposons en plus que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est une involution (c'est-à-dire, $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est l'identité). Peut-on affirmer que φ est une involution ?

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, et soit k un entier strictement positif. Soient A_0, A_1, ..., A_k des points de $\mathcal{E}$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- les points A_0, A_1, ..., A_k sont affinement indépendants ;
- pour tout entier $0 \leq i \leq k$, on a $A_i \notin < A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k >$;
- pour tout entier $1 \leq j \leq k$, on a $A_j \notin < A_0, \ldots, A_{j-1} >$.

Exercice 3

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$. On note

- A' le milieu du segment $[BC]$,
- B' le milieu du segment $[AC]$,
- C' le milieu du segment $[AB]$.

(a) Montrer qu'il existe une homothétie $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$ et $\varphi(C') = C$. Quel est le rapport de φ?

(b) Soit k un nombre réel différent de 0 et 1. Soit M un point de $\mathcal{E}$. On note

- P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k,
- Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k,
- R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k.

Trouver les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{1-k}$.

(c) Montrer qu'il existe une transformation affine $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que ψ soit une homothétie ou une translation et $\psi(P) = A$, $\psi(Q) = B$, $\psi(R) = C$.

(d) Supposons que le point A est différent du point P, le point B est différent du point Q, le point C est différent du point R. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles.