Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Education et Formation*, Section CAPES, M1
Année 2011 - 2012

Algèbre et géométrie 1

Corrigé d'interrogation de contrôle continu

Mercredi 9 novembre 2011

1. *Donner la définition d'un sous-groupe et la définition d'un isomorphisme de groupes.*

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Un *sous-groupe* H de G est un sous-ensemble $H \subset G$ tel que

(1) H contient l'élément neutre e de G,
(2) H est stable par multiplication : si h_1 et h_2 sont des éléments de H, alors $h_1 \cdot h_2 \in H$,
(3) H est stable par inversion : si $h \in H$, alors $h^{-1} \in H$.

Soient G et G' deux groupes. Un *morphisme* (de groupes) de G dans G' est une application $f : G \to G'$ telle que, pour tous éléments g_1 et g_2 dans G, on ait $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$. Si un morphisme de groupes $f : G \to G'$ est bijectif, on dit que f est un *isomorphisme*.

2. *Soit G un ensemble muni d'une opération interne $\diamond$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

– *il existe un élément e de G tel que, pour tout élément a de G, on ait*

$$a \diamond e = a,$$

– *pour tout élément a de G, il existe un élément a' de G tel que*

$$a \diamond a' = e,$$

– *pour des éléments quelconques a, b et c de G, on a*

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c).$$

Montrer que $(G, \diamond)$ est un groupe.

Solution. Pour démontrer que G est un groupe, il est suffisant de montrer que, pour tout élément a de G, on a $e \diamond a = a$ et $a' \diamond a = e$, où a' est un élément de G tel que $a \diamond a' = e$.

Montrons d'abord l'énoncé suivant : si a et b sont deux éléments de G tels que $a \diamond b = e$, alors $b \diamond a = e$. Notons b' un élément de G tel que $b \diamond b' = e$. On a

$$b \diamond a = (b \diamond a) \diamond e = (b \diamond a) \diamond (b \diamond b') = b \diamond (a \diamond b) \diamond b' == (b \diamond e) \diamond b' = b \diamond b' = e.$$

Maintenant, soit a un élément quelconque de G, et soit a' un élément de G tel que $a \diamond a' = e$. D'après le résultat démontré ci-dessus, on a $a' \diamond a = e$. De plus,

$$e \diamond a = (a \diamond a') \diamond a = a \diamond (a' \diamond a) = a \diamond e = a.$$

Ceci démontre que G est un groupe.

3. *Considérons le groupe $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls (l'opération interne est la multiplication habituelle).*

(a) *Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.*

(b) *Donner une description géométrique des classes (à gauche et à droite) modulo $\mathbb{U}$.*

Solution.
(a) On a les trois propriétés suivantes.

- L'élément neutre 1 de $\mathbb{C}^*$ est de module 1, donc cet élément appartient à l'ensemble U.
- Si $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_2 \in \mathbb{U}$, on a $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 1$, d'où $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1$, c'est-à-dire, $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, on a $|z| = 1$, ce qui implique que $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$, c'est-à-dire, $z \in \mathbb{U}$.

Par conséquent, $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

(b) Le groupe $\mathbb{C}^*$ est commutatif, donc, dans $\mathbb{C}^*$, toute classe à gauche modulo $\mathbb{U}$ est une classe à droite modulo $\mathbb{U}$ (et toute classe à droite modulo $\mathbb{U}$ est une classe à gauche modulo $\mathbb{U}$).

Pour deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2, on a $z_1\mathbb{U} = z_2\mathbb{U}$ si et seulement si $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire, si et seulement si $|z_1| = |z_2|$. Donc, les classes modulo $\mathbb{U}$ sont les cercles (de rayons strictement positifs) de centre 0.

4. *Soit G un groupe fini dont le nombre d'éléments est pair. Montrer qu'il existe un élément g de G tel que $g \neq e$ et $g^2 = e$, où e est l'élément neutre de G.*

Solution. Supposons que, pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre e de G, on a $g^2 \neq e$. Dans ce cas, pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre e de G, on a $g \neq g^{-1}$. Donc, les éléments de G différents de e forment des paires, chaque paire étant composée d'un élément et de son inverse. Par conséquent, le nombre d'éléments de G différents de e est pair. Ceci contredit le fait que l'ordre de G est pair. Cette contradiction montre qu'il existe un élément g de G tel que $g \neq e$ et $g^2 = e$.