Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2020 - 2021
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du premier contrôle continu

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

(a) Soient $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines ayant la même application linéaire associée. Peut-on affirmer que $\varphi = \psi$?

(b) Soient $\varphi' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines telles que leurs applications linéaires associées $\overrightarrow{\varphi}'$ et $\overrightarrow{\psi}'$ commutent, c'est-à-dire $\overrightarrow{\varphi}' \circ \overrightarrow{\psi}' = \overrightarrow{\psi}' \circ \overrightarrow{\varphi}'$. Peut-on affirmer que les applications φ' et ψ' commutent ?

Solution

(a) Non. L'identité $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension ≥ 1 et une translation $t_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de vecteur non nul v ont la même application linéaire associée.

(b) Non. La translation $x \mapsto x + 1$ de $\mathbb{R}$ et la multiplication par -1 dans $\mathbb{R}$ sont des applications affines (ici $\mathbb{R}$ est muni de sa structure affine naturelle) qui ne commutent pas, mais leurs applications linéaires associées commutent.

Exercice 2

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$. Soient A, B, C et D des points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts. On suppose que

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles,
- les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles,
- le point O d'intersection des droites (AC) et (BD) est le milieu du segment $[AC]$.

Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la symétrie centrale de centre O.

(a) Montrer que $C = \varphi(A)$.

(b) Montrer que $D = \varphi(B)$.

(c) Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Solution

(a) L'application linéaire associée d'une symétrie centrale est la multiplication par -1. Donc, $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. De plus, $\varphi(O) = O$. Par conséquent, $\varphi(A) = C$.

(b) On a $\overrightarrow{C\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}$. Donc, le point $\varphi(B)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ qui passe par le point C et est parallèle à la droite (AB). D'autre part, le point O est différent de B (sinon, les points A, B, C et D seraient alignés, ce qui est impossible car les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles) et le point $\varphi(B)$ appartient à la droite (OB). Les droites $\mathcal{D}$ et (OB) sont différentes, et elles ont D pour l'unique point d'intersection. Par conséquent, $\varphi(B) = D$.

(c) On a $\varphi(C) = A$ et $\varphi(B) = D$. Donc, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CB}$. Par conséquent, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3

Soit $n \geq 3$ un entier, et soient A_1, A_2, ..., A_n des points affinement indépendants dans un espace affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que l'isobarycentre des points A_1, A_2, ..., A_n appartient au sous-espace engendré par $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

(b) Soit i un entier strictement positif et inférieur ou égal à n. Montrer que le point A_i ne coïncide pas avec l'isobarycentre des points A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n.

(c) Si i est un entier strictement positif et inférieur ou égal à n, la *i-ème médiane* de la collection A_1, A_2, ..., A_n est la droite qui passe par le point A_i et l'isobarycentre des points A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n. Montrer que toutes les n médianes de la collection A_1, A_2, ..., A_n ont exactement un point commun.

Solution

(a) L'isobarycentre P des points A_1, A_2, ..., A_n vérifie

$$n\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Donc, P appartient au sous-espace engendré par $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

(b) Si A_i coïncide avec l'isobarycentre des points A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n, alors A_i appartient au sous-espace engendré par les points A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n, ce qui contredit le fait que n points A_1, A_2, ..., A_n sont affinement indépendants.

(c) Pour tout entier $1 \leq i \leq n$, l'isobarycentre P des points A_1, A_2, ..., A_n est le barycentre du système de points pondérés $\{(A_i, 1), (P_i, n-1)\}$, où P_i est l'isobarycentre des points A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n. Donc, P appartient aux n médianes de la collection A_1, A_2, ..., A_n. L'intersection de ces n médianes est un sous-espace affine. Si sa dimension est strictement positive (égale à 1), toutes les n médianes coïncident, ce qui est impossible car les points A_1, A_2, ..., A_n ne sont pas alignés.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $\mathrm{im}(\varphi^2) = \mathrm{im}(\varphi)$.

(a) Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un point $P \in \mathcal{E}$ et un vecteur $u \in \ker(\overrightarrow{\varphi})$ tels que $\overrightarrow{M\varphi(P)} = u$.

(b) Montrer que u est uniquement déterminé par M.

(c) Donner un exemple d'application φ ayant cette propriété.

Solution

(a) Soit $M \in \mathcal{E}$ un point. Puisque $\mathrm{im}(\varphi^2) = \mathrm{im}(\varphi)$, il existe un point $P \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(M) = \varphi^2(P)$. On pose $u = \overrightarrow{M\varphi(P)}$, et on a

$$\overrightarrow{\varphi}(u) = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{M\varphi(P)}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi^2(P)} = 0.$$

(b) On pose $F = \mathrm{im}(\varphi)$. La restriction de φ sur F peut être vue comme application à valeurs dans F. L'application $\varphi|_F : F \to F$ est surjective, donc, bijective (F est un espace vectoriel de dimension finie). Donc, le point $\varphi(P) \in F$ (et, par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{M\varphi(P)}$) est uniquement déterminé par le point $\varphi^2(P) = \varphi(M) \in F$.

(c) Toute projection affine sur un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ (par exemple, l'identité de $\mathcal{E}$) vérifie la propriété demandée.