Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2021 - 2022
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du premier contrôle continu

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit E la direction de $\mathcal{E}$. Considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi}$ son application linéaire associée.

(a) Supposons que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est injective. Peut-on affirmer que φ est injective ? Peut-on affirmer que φ est surjective ?

(b) Supposons en plus que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est une involution (c'est-à-dire, $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est l'identité). Peut-on affirmer que φ est une involution ?

Solution

(a) Oui, on peut affirmer que φ est injective. En effet, soit O un point de $\mathcal{E}$. L'application φ peut être vue comme application linéaire du vectorialisé $\mathcal{E}_O$ de $\mathcal{E}$ en O vers le vectorilaisé $\mathcal{E}_{\varphi(O)}$ de $\mathcal{E}$ en $\varphi(O)$. Sous l'identification de $\mathcal{E}_O$ et $\mathcal{E}_{\varphi(O)}$ avec E, cette application linéaire coïncide avec $\overrightarrow{\varphi}$. Donc, l'injectivité de $\overrightarrow{\varphi}$ implique l'injectivité de φ.

De plus, puisque l'espace vectoriel E est de dimension finie, l'application injective $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est forcement surjective. Donc, l'application φ est surjective aussi.

(b) Non. Si E est un espace vectoriel de dimension strictement positive et $v \in E$ est un vecteur non nul, la translation $t_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de vecteur v n'est pas une involution (car $t_v \circ t_v$ est la translation du vecteur $2v$). D'autre part, l'application $\overrightarrow{t_v}$ est l'identité de E, donc, $\overrightarrow{t_v}$ est une involution injective.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, et soit k un entier strictement positif. Soient A_0, A_1, ..., A_k des points de $\mathcal{E}$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

- les points A_0, A_1, ..., A_k sont affinement indépendants ;
- pour tout entier $0 \leq i \leq k$, on a $A_i \notin < A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k >$;
- pour tout entier $1 \leq j \leq k$, on a $A_j \notin < A_0, \ldots, A_{j-1} >$.

Solution

Supposons que les points A_0, A_1, ..., A_k sont affinement indépendants. Si

$$A_i \in < A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k >$$

pour un certain entier $0 \leq i \leq k$, le vecteur $\overrightarrow{A_0A_i}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$, ..., $\overrightarrow{A_0A_{i-1}}$, $\overrightarrow{A_0A_{i+1}}$, ..., $\overrightarrow{A_0A_k}$, ce qui contredit l'hypothèse que les points A_0, A_1, ..., A_k sont affinement indépendants.

Supposons maintenant que, pour tout entier $0 \leq i \leq k$, on a $A_i \notin < A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k >$. Soit $1 \leq j \leq k$ un entier. Puisque $A_j \notin < A_0, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_k >$, on a

$$A_j \notin < A_0, \ldots, A_{j-1} > .$$

Finalement, supposons que, pour tout entier $1 \leq j \leq k$, on a $A_j \notin < A_0, \ldots, A_{j-1} >$. Montrons par récurrence (sur ℓ) l'affirmation suivante : pour tout entier $1 \leq \ell \leq k$, la dimension du sous-espace $< A_0, \ldots, A_\ell >$ est égale à ℓ. Puisque $A_1 \notin < A_0 >$ (autrement dit, les points A_0 et A_1 sont distincts), l'affirmation est vraie pour $\ell = 1$. Supposons que l'affirmation est vraie pour un entier ℓ entre 1 et $k-1$, c'est-à-dire, la dimension du sous-espace $< A_0, \ldots, A_\ell >$ est égale à ℓ. Puisque $A_{\ell+1} \notin < A_0, \ldots, A_\ell >$, on obtient que la dimension du sous-espace $< A_0, \ldots, A_\ell, A_{\ell+1} >$ est égale à $\ell + 1$. L'affirmation étant démontrée, on conclut que la dimension du sous-espace $< A_0, \ldots, A_k >$ est égale à k, autrement dit, les points A_0, A_1, ..., A_k sont affinement indépendants.

Exercice 3

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$. On note

- A' le milieu du segment $[BC]$,
- B' le milieu du segment $[AC]$,
- C' le milieu du segment $[AB]$.

(a) Montrer qu'il existe une homothétie $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$ et $\varphi(C') = C$. Quel est le rapport de φ?

(b) Soit k un nombre réel différent de 0 et 1. Soit M un point de $\mathcal{E}$. On note

- P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k,
- Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k,
- R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k.

Trouver les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{1-k}$.

(c) Montrer qu'il existe une transformation affine $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que ψ soit une homothétie ou une translation et $\psi(P) = A$, $\psi(Q) = B$, $\psi(R) = C$.

(d) Supposons que le point A est différent du point P, le point B est différent du point Q, le point C est différent du point R. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles.

Solution

(a) Soit O l'isobarycentre des points A, B et C. L'associativité de la barycentration implique que O est le barycentre du système $\{(A, 1), (A', 2)\}$, donc, $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OA'}$. De façon similaire, $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OC'}$. Par conséquent, si $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est l'homothétie de centre O et de rapport -2, on a $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$ et $\varphi(C') = C$.

(b) Soit $\eta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{1-k}$. On a $\overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{A'M}$, d'où

$$\frac{1}{1-k}\overrightarrow{MP} = \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'P}) = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MA'} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA'}.$$

Donc, $\eta(P) = A'$. De façon similaire, $\eta(Q) = B'$ et $\eta(R) = C'$.

(c) Posons $\psi = \varphi \circ \eta$. On a $\psi(P) = A$, $\psi(Q) = B$ et $\psi(R) = C$. De plus, puisque η est la composée de deux homothéties, c'est une homothétie ou une translation.

(d) Si ψ est une homothétie, son centre appartient à chacune des droites (AP), (BQ) et (CR); donc, dans ce cas, ces droites sont concourantes. Si ψ est une translation, le vecteur (non nul) de cette translation appartient à la direction de chacune des droites (AP), (BQ) et (CR); donc, dans ce cas, ces droites sont parallèles.