Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2021 - 2022
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du deuxième contrôle continu

Exercice 1

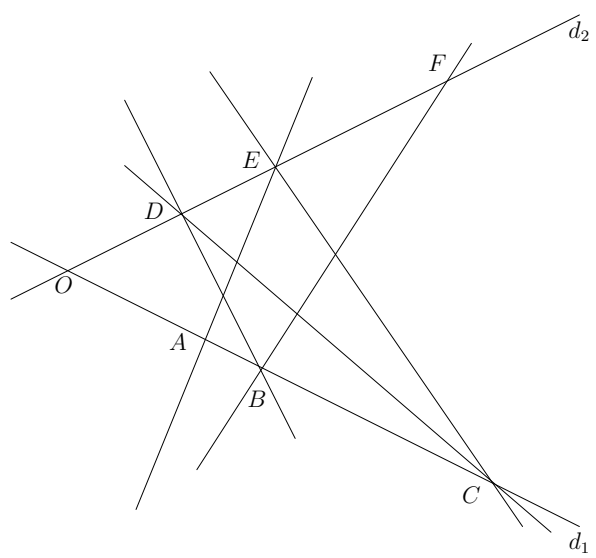
Soit E un espace vectoriel (muni de sa structure affine naturelle), et soit $\mathcal{F} \subset E$ un sous-espace affine ne contenant pas 0. Montrer que la projection canonique $p : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ se restreint en une injection de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{P}(E)$.

Solution.

Supposons qu'il existe deux vecteurs $x, y \in \mathcal{F}$ tels que $x \neq y$ et $p(x)$ coïncide avec $p(y)$. La dernière propriété implique que les vecteurs x et y engendrent la même droite vectorielle $D \subset E$. Puisque $x \neq y$ et $\mathcal{F} \subset E$ est un sous-espace affine, on obtient que $D \subset \mathcal{F}$, ce qui est impossible, car 0 n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Cette contradiction montre que la restriction de p sur $\mathcal{F}$ est injective.

Exercice 2

Soient d_1 et d_2 deux droites distinctes d'un plan projectif réel. Notons O leur point d'intersection. Soient A, B et C des points deux à deux distincts de la droite d_1 tels que tous ces points soient distincts de O. Soient D, E et F des points deux à deux distincts de la droite d_2 tels que tous ces points soient distincts de O. La figure ci-dessous contient sept droites : d_1, d_2, (AE), (BD), (BF), (CD) et (CE).

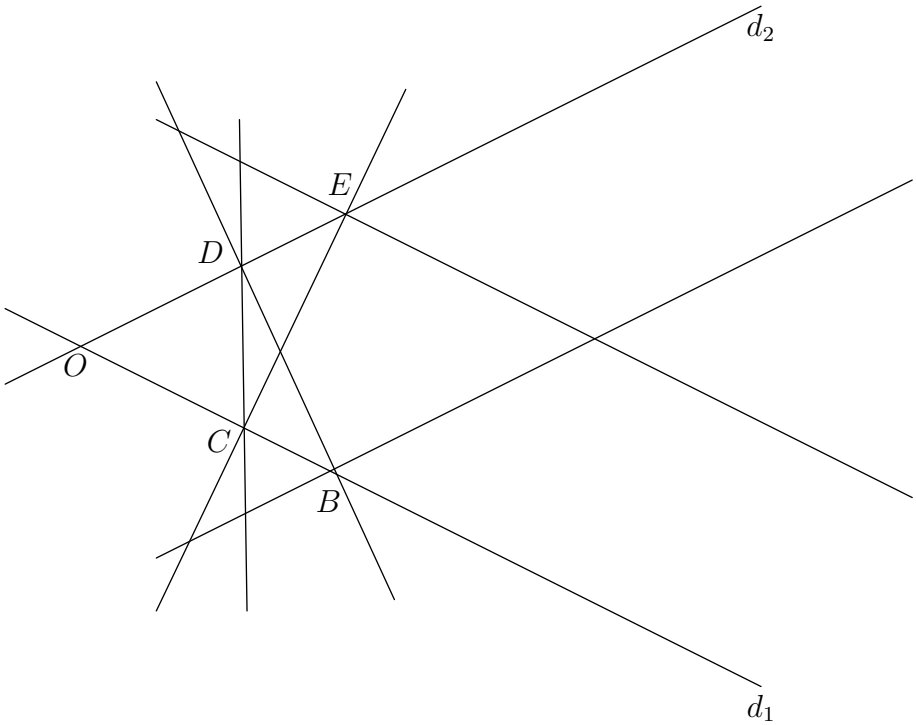


Redessiner cette figure après avoir envoyé à l'infini

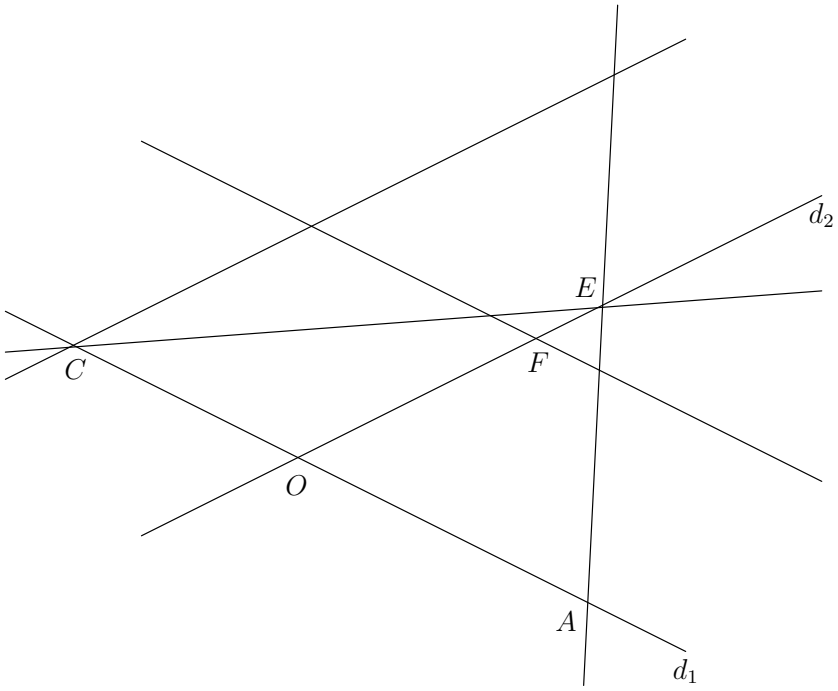
(a) les points A et F,
(b) la droite (BD),
(c) la droite d_1.

Solution.

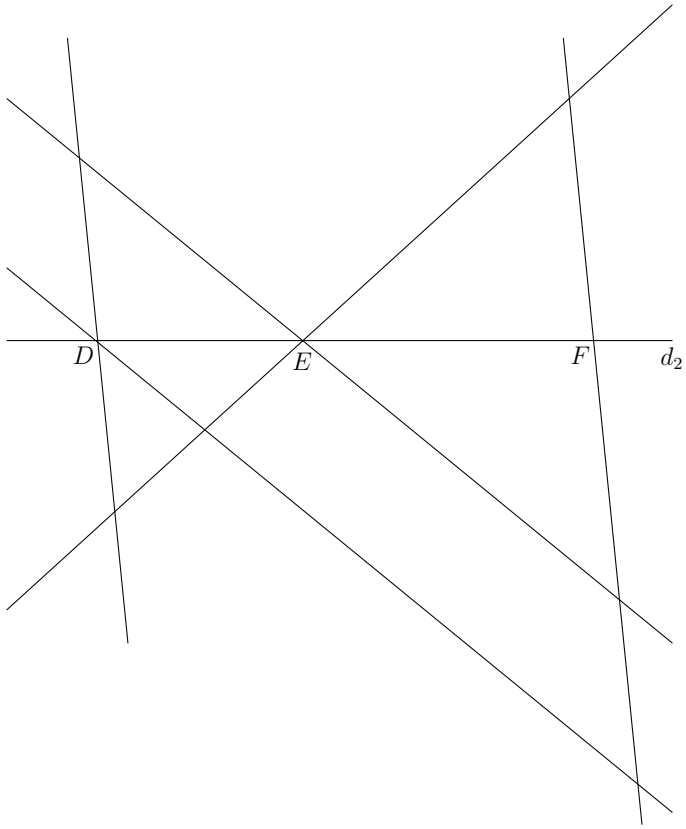
(a)



(b)



(c)



Exercice 3

Soit Δ une droite projective réelle. Rappelons qu'une *involution* de Δ est une application de Δ dans Δ telle que la composition de cette application avec elle-même soit l'identité id_Δ. Soit $\psi : \Delta \to \Delta$ une homographie de Δ.

(a) Montrer que ψ est une involution différente de l'identité si et seulement si il existe deux points distincts P et Q de Δ tels que $\psi(P) = Q$ et $\psi(Q) = P$.

(b) Soient A_1, A_2 et A_3 des points de Δ deux à deux distincts, et soient B_1, B_2 et B_3 des points de Δ deux à deux distincts. Notons φ l'unique homographie de Δ telle que $\varphi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$. Montrer que φ est une involution si et seulement si on a les trois égalités suivantes entre des birapports :

$$[A_1, A_2, A_3, B_1] = [B_1, B_2, B_3, A_1],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_2] = [B_1, B_2, B_3, A_2],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_3] = [B_1, B_2, B_3, A_3].$$

(c) Soit $\xi : \Delta \to \Delta$ une homographie involutive différente de l'identité. Supposons que ξ a au moins un point fixe. Montrer que ξ a exactement deux points fixes.

(d) Notons M et N les points fixes de ξ. Soit $P \in \Delta$ un point différent de M et N. Montrer que $[M, N, P, \xi(P)] = -1$.

Solution.

(a) Supposons que ψ est une involution différente de l'identité. Puisque ψ est différente de l'identité, il existe un point P de Δ tel que $\psi(P) \neq P$. Posons $Q = \psi(P)$. Puisque ψ est une involution, on a $P = \psi(\psi(P))$, c'est-à-dire, $P = \psi(Q)$.

Supposons maintenant qu'il existe des points distincts P et Q de Δ tel que $\psi(P) = Q$ et $\psi(Q) = P$. Soit X un point quelconque de Δ tel que $\psi(X) \neq P$ et $\psi(X) \neq Q$. Dans ce cas, $\psi(\psi(X)) \neq P$ et $\psi(\psi(X)) \neq Q$. On a

$$\begin{aligned}[P, Q, \psi(X), X] &= [\psi(P), \psi(Q), \psi(\psi(X)), \psi(X)] \\ &= [Q, P, \psi(\psi(X)), \psi(X)] = [P, Q, \psi(X), \psi(\psi(X))],\end{aligned}$$

d'où $\psi(\psi(X)) = X$. Donc, ψ est une involution. De plus, ψ est différente de l'identité, car $P \neq Q = \psi(P)$.

(b) Supposons que φ est une involution. Puisque φ préserve les birapports, on obtient que

$$\begin{aligned}[A_1, A_2, A_3, B_1] &= [\varphi(A_1), \varphi(A_2), \varphi(A_3), \varphi(B_1)] \\ &= [B_1, B_2, B_3, \varphi(\varphi(A_1))] = [B_1, B_2, B_3, A_1].\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$[A_1, A_2, A_3, B_2] = [B_1, B_2, B_3, A_2] \text{ et } [A_1, A_2, A_3, B_3] = [B_1, B_2, B_3, A_3].$$

Supposons maintenant que

$$[A_1, A_2, A_3, B_1] = [B_1, B_2, B_3, A_1],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_2] = [B_1, B_2, B_3, A_2],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_3] = [B_1, B_2, B_3, A_3].$$

Donc, on a

$$[A_1, A_2, A_3, B_1] = [\varphi(A_1), \varphi(A_2), \varphi(A_3), A_1],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_2] = [\varphi(A_1), \varphi(A_2), \varphi(A_3), A_2],$$
$$[A_1, A_2, A_3, B_3] = [\varphi(A_1), \varphi(A_2), \varphi(A_3), A_3],$$

d'où $\varphi(B_1) = A_1$, $\varphi(B_2) = A_2$ et $\varphi(B_3) = A_3$. Donc, $\varphi(\varphi(A_i)) = A_i$, $i = 1, 2, 3$. Puisque les points A_1, A_2 et A_3 sont deux à deux distincts et $\varphi \circ \varphi$ est une homographie, on obtient que $\varphi \circ \varphi$ est l'identité, c'est-à-dire, φ est une involution.

(c) Soit M un point fixe de ξ. Puisque l'homographie ξ est différente de l'identité, ξ a au plus deux points fixes. Il reste à montrer que ξ a un deuxème point fixe. Soit X un point de Δ différént de M. Le point $\xi(X)$ est aussi différent de M. Il existe un point N de Δ tel que

$$[X, \xi(X), M, N] = -1.$$

Remarquons que $N \neq M$. On a

$$-1 = [\xi(X), X, M, \xi(N)] = [X, \xi(X), M, \xi(N)]^{-1}.$$

Donc, $[X, \xi(X), M, N] = [X, \xi(X), M, \xi(N)]$, d'où $N = \xi(N)$.

(d) On a

$$\begin{aligned}[M, N, P, \xi(P)] &= [M, N, \xi(P), \xi(\xi(P))] \\ &= [M, N, \xi(P), P] = [M, N, P, \xi(P)]^{-1},\end{aligned}$$

d'où $[M, N, P, \xi(P)] = 1$ ou $[M, N, P, \xi(P)] = -1$. Puisque $P \neq \xi(P)$, on a

$$[M, N, P, \xi(P)] \neq 1.$$

Par conséquent, $[M, N, P, \xi(P)] = -1$.

Exercice 4 (Théorème de Desargues en dimension supérieure)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soient D, D' et D'' trois droites de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, deux à deux distinctes et concourantes en un point O. Soient A et B (respectivement, A' et B', A'' et B'') deux points de D (respectivement, D', D'') distincts du point O.

(a) Montrer que les droites $(A'A'')$ et $(B'B'')$ (respectivement, (AA'') et (BB''), (AA') et (BB')) se coupent en un point. Notons M (respectivement, M', M'') le point d'intersection des droites $(A'A'')$ et $(B'B'')$ (respectivement, (AA'') et (BB''), (AA') et (BB')).

(b) Montrer que les points M, M' et M'' sont alignés.

Solution.

(a) Les droites D' et D'' ont exactement un point en commun, donc elles engendrent un plan dans $\mathbb{P}(E)$; notons P ce plan. Les droites $(A'A'')$ et $(B'B'')$ sont distinctes et sont contenues dans P. Donc, elles se coupent en un point. De façon similaire, les droites (AA'') et (BB'') (respectivement, (AA') et (BB')) se coupent en un point.

(b) Si la droite D est contenue dans le plan P, l'affirmation demandée est un corollaire du théorème de Desargues.

Supposons que $D \not\subset P$. Dans ce cas, les droites D, D' et D'' engendrent un sous-espace projectif $V \subset \mathbb{P}(E)$ de dimension 3. Dans ce cas, les points A, A' et A'' sont projectivement indépendants et engendrent un plan $S_A \subset V$ ne contenant pas le point O. De façon similaire, les points B, B' et B'' engendrent un plan $S_B \subset V$ ne contenant pas le point O. Les plans S_A et S_B sont distincts, donc ils se coupent le long d'une droite. Cette droite contient les points M, M' et M''.