Topologie algébrique des variétés I

Ch. 1. Rappels

§1. Groupes d'homologie

Homologie singulière

Définitions • k-simplexe standard, $k \geq 0$ entier

$$T^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}_{\geq 0} \mid x_0 + \dots + x_k = 1\}$$

• k-simplexe singulier $\sigma : T^k \longrightarrow X$ d'un espace topologique X

• k-chaîne singulière dans X :

$n_1\sigma_1 + \dots + n_m\sigma_m$, où $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$

• complexe de chaînes singulières de X :

$$\mathcal{C}(X) : \quad \dots \to C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, \sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k)}$$

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

• groupes d'homologie singulière de X :

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X),$$

où $Z_k(X) = \ker \partial_k$ et $B_k(X) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$ si $k \geq 1$,

et $Z_0(X) = C_0(X)$, $B_0(X) = \operatorname{Im} \partial_1$.

• Toute application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$, donc un morphisme $f_{*,k} : H_k(X) \to H_k(Y)$, $k \geq 0$.

- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

  $(Id_X)_{*,k} = Id_{H_k(X)}$

- Si $f, g : X \to Y$ deux applications continues homotopes, alors $f_\#, g_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ sont homotopes (comme morphismes de complexes de chaînes), donc, ils induisent les mêmes morphismes en homologie.

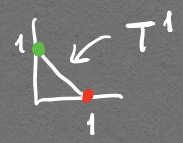
- Groupes d'homologie singulière d'un point

  $X = \{pt\}$

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \underline{\underline{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \cdots \xrightarrow{0} \underline{\underline{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

k impair $\quad H_k(X) = 0$

k pair, $k \neq 0 \quad H_k(X) = 0$, $\quad H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$



Groupes d'homologie réduits

Complexe de chaînes singulière augmenté :

$$\cdots \to C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

Groupes $\tilde{H}_k(X)$ $\qquad \varepsilon : n_1\sigma_1 + \dots + n_m\sigma_m \mapsto n_1 + \dots + n_m$

Groupes d'homologie relatifs $\quad (X, A)$, $A \subset X$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(A) \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(X) \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{k+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_1(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(X,A) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$C_k(X,A) = C_k(X)/C_k(A)$

Groupes $H_k(X,A)$

- <u>Suite exacte homologique de la paire (X,A)</u>

$$\cdots \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{k+1}(A)} \to H_{k+1}(X) \xrightarrow{\simeq} H_{k+1}(X,A) \xrightarrow{\delta} \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_k(A)} \to \cdots$$

En général, une suite exacte courte de complexes de chaînes produit une suite exacte longue en homologie.

- Si $x_0 \in X$, on a $H_k(X,\{x_0\}) = H_k(X,x_0) \simeq \tilde{H}_k(X)$ pour tout entier $k \geq 0$.

- Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une application continue, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(B) \arrow[r] & H_{k+1}(Y) \arrow[r] & H_{k+1}(Y,B) \arrow[r] & H_k(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une application continue telle que $f : X \to Y$ et $f|_A : A \to B$ soient des equivalences d'homotopie, alors $f_* : H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$ est un isomorphisme pour tout entier $k \geq 0$.

- <u>Suite exacte homologique associée à un triplet (X,A,B)</u>

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(A,B) \arrow[r] & H_{k+1}(X,B) \arrow[r] & H_{k+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[dr] & H_k(A,B) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & H_k(A) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Comme corollaire, on obtient la suite exacte, associée à (X,A), pour les groupes d'homologie réduits :

$$\dots \to \tilde{H}_{k+1}(A) \to \tilde{H}_{k+1}(X) \to H_{k+1}(X,A) \to \tilde{H}_k(A) \to \dots$$

Théorème d'excision

Triplet topologique (X, A, V), où $\overline{V} \subset \mathring{A}$.

Pour tout entier $k \geq 0$, l'inclusion $i : (X \setminus V, A \setminus V) \to (X, A)$ induit un isomorphisme

$$i_* : H_k(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow H_k(X, A).$$

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ une collection de sous-ensembles de X telle que les intérieurs $\mathring{U}_i$ de ces sous-ensembles forment un recouvrement ouvert de X.

Complexe de chaînes $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{C}(X)$.

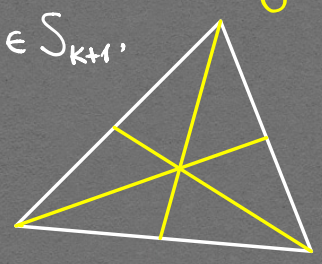
<u>Proposition</u> Le morphisme ι est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

En particulier, ι induit des isomorphismes des groupes d'homologie des deux complexes de chaînes.

Notion importante : subdivision barycentrique.

Pour toute permutation $\tau \in S_{k+1}$, on considère

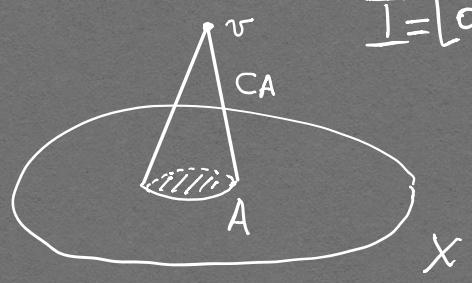
$$\{(x_0, \dots, x_k) \in T^k \mid x_{\tau(0)} \leq \dots \leq x_{\tau(k)}\}$$



Corollaires du théorème d'excision

- Inclusion $(X,A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ induit un isomorphisme $H_k(X,A) \longrightarrow H_k(X \cup CA, CA)$ pour tout entier $k \geq 0$.

$I = [0;1]$



Cône CA de A

$$CA = (A \times I)/\sim$$

l'équivalence identifie tous les points de la forme $(a,1)$.

$$X \cup CA = (X \amalg CA)/\sim$$

l'équivalence identifie les points $a \in A$ et $(a,0) \in CA$.

- De plus, $H_k(X \cup CA, CA) \simeq H_k(X \cup CA, v) \simeq \tilde{H}_k(X \cup CA)$, où v est le sommet du cône CA.
- Soit (X,A) une paire de Borsuk, c'est-à-dire, pour toute application continue $F : X \to Y$, toute homotopie $f_t : A \to Y$ telle que $f_0 = F|_A$ admet une extension à une homotopie $F_t : X \to Y$ telle que $F_0 = F$ (propriété d'extension des homotopies).

Projection $p : X \to X/A$ induit un isomorphisme $H_k(X,A) \longrightarrow H_k(X/A, A/A) \simeq \tilde{H}_k(X/A)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Démonstration La projection canonique $X \cup CA \to (X \cup CA)/CA \simeq X/A$ est une équivalence d'homotopie. $\square$

Groupes d'homologie singulière des sphères

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la sphère S^{n-1} comme bord du disque unité fermé $D^n \subset \mathbb{R}^n$. On a $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$.

Théorème Soit $n \geq 1$ un entier. On a

$$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus,

$$H_k(S^0) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En termes des groupes d'homologie réduits, on a

$$\tilde{H}_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_k(D^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "\sim", "\text{iso}"'] \arrow[d, "\wr"] & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & \tilde{H}_{k-1}(D^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
& 0 & \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) \arrow[d, "\wr"] & & 0 & \\
& & \tilde{H}_k(S^n) \arrow[ur, leftrightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

$\square$