Démonstration du théorème Le lemme local-global pour les ouverts nous donne l'énoncé du théorème pour M. $\square$

Démonstration du lemme sur les suites de Mayer-Vietoris

On peut supposer que $M = U \cup V$.
Si $K \subset U$ et $L \subset V$ sont des compacts, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^m(M, M\setminus(K\cap L)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^m(M, M\setminus K) \oplus H^m(M, M\setminus L) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^m(M, M\setminus(K\cup L)) \arrow[r] \arrow[dd, "\mu_{K\cup L}\cap"] & \cdots \\
& H^m(U\cap V, (U\cap V)\setminus(K\cap L)) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\cap"] & H^m(U, U\setminus K) \oplus H^m(V, V\setminus L) \arrow[d, "\mu_K\cap \oplus \mu_L\cap"] & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-m}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) \arrow[r] & H_{n-m}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Il est suffisant de montrer que ce diagramme est commutatif (à signe près). Vérifions la commutativité du carré suivant (le reste est un exercice) :

$$\begin{tikzcd}
H^m(M, M\setminus(K\cup L)) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{K\cup L}\cap"] & H^{m+1}(M, M\setminus(K\cap L)) \arrow[r, "\simeq"] & H^{m+1}(U\cap V, (U\cap V)\setminus(K\cap L)) \arrow[d, "\mu_{K\cap L}\cap"] \\
H_{n-m}(M) \arrow[rr] & & H_{n-m-1}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

On pose $A = M \setminus K$ et $B = M \setminus L$. On a la suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \to C^*(M, A+B) \xrightarrow{+} C^*(M,A) \oplus C^*(M,B) \xrightarrow{-} C^*(M, A \cap B) \to 0$$

($C^*(M, A+B)$ est formé de cochaînes qui s'annulent sur les chaînes dans $M \setminus K$ et les chaînes dans $M \setminus L$).

Pour évaluer le morphisme δ sur une classe de cohomologie représentée par un cocycle $\varphi \in C^*(M, A \cap B)$, on écrit

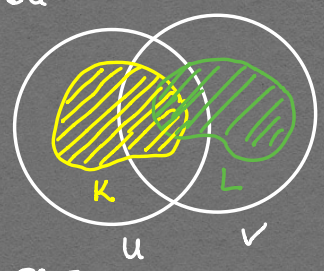
$$\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad , \text{ où } \varphi_A \in C^*(M,A), \varphi_B \in C^*(M,B).$$

On a $\delta[\varphi] = [\delta \varphi_A] = [\delta \varphi_B]$

$(\delta \varphi = 0$, donc, $\delta \varphi_A = \delta \varphi_B)$.

De façon similaire, pour toute classe d'homologie représentée par un cycle $c \in C_i^u(M)$ $(c = c_u + c_v$, où $c_u \in C_i(U)$ et $c_v \in C_i(V))$, on a

$$\partial[c] = [\partial c_u].$$



La classe $\mu_{K \cup L}$ peut être représentée par une chaîne $\alpha = \alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V} + \alpha_{V \setminus K}$.

La chaîne $\alpha_{U \cap V}$ représente $\mu_{K \cap L}$, car les chaînes $\alpha_{U \setminus L}$ et $\alpha_{V \setminus K}$ sont dans le complémentaire de $K \cap L$.

De façon similaire, $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$ représente μ_K.

Soit $[\varphi] \in H^m(M, M \setminus (K \cup L))$. En appliquant δ, on obtient $[\delta \varphi_A]$. Ensuite, dans $H_{n-m-1}(U \cap V)$, on obtient

$$[\alpha_{U \cap V} \cap \delta \varphi_A] = [\partial \alpha_{U \cap V} \cap \varphi_A]$$

(car $\partial(\alpha_{U \cap V} \cap \varphi_A) = (-1)^m (\partial \alpha_{U \cap V} \cap \varphi_A - \alpha_{U \cap V} \cap \delta \varphi_A)$ et $\alpha_{U \cap V} \cap \varphi_A$ est une chaîne dans $U \cap V$).

D'autre part, dans $H_{n-m}(M)$, on obtient $[\alpha \cap \varphi]$. On a

$$\alpha \cap \varphi = (\alpha_{U \setminus L} \cap \varphi) + (\alpha_{U \cap V} \cap \varphi + \alpha_{V \setminus K} \cap \varphi).$$

Donc, $\partial [\alpha \cap \varphi] = [\partial(\alpha_{U \setminus L} \cap \varphi)] \in H_{n-m-1}(U \cap V)$.

On a

$$\partial(\alpha_{U \setminus L} \cap \varphi) = (-1)^m \partial \alpha_{U \setminus L} \cap \varphi \longleftarrow (\text{car } \delta \varphi = 0)$$

$$= (-1)^m \partial \alpha_{U \setminus L} \cap \varphi_A \longleftarrow (\text{car } \varphi_B \text{ est nul sur les chaînes dans } B = M \setminus L)$$

$$= (-1)^{m+1} \partial \alpha_{U \cap V} \cap \varphi_A,$$

car $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}) \cap \varphi_A = 0$ et $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V})$ est une chaîne dans $U \setminus K$ ($\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$ représente μ_K). $\square$

§3. Relations avec le cup produit

Proposition X espace topologique, $k, \ell \geq 0$ entiers, R anneau commutatif.

Pour tous $\alpha \in C_{k+\ell}(X;R)$, $\varphi \in C^k(X;R)$ et $\psi \in C^\ell(X;R)$, on a

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Démonstration Pour tout simplexe singulier $\sigma : T^{k+\ell} \to X$, on a

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi(\varphi(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\dots,e_k)})\, \sigma \circ \Delta_{(e_k,\dots,e_{k+\ell})})$$

$$= \varphi(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\dots,e_k)})\, \psi(\sigma \circ \Delta_{(e_k,\dots,e_{k+\ell})}) = (\varphi \smile \psi)(\sigma). \square$$

Donc, le morphisme

$$\varphi \smile : C^\ell(X;R) \to C^{k+\ell}(X;R)$$

coïncide avec le morphisme

$$\mathrm{Hom}_R(C_\ell(X;R), R) \to \mathrm{Hom}_R(C_{k+\ell}(X;R), R)$$

dual à $\frown \varphi$.

Au niveau de groupes d'homologie/cohomologie, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^{\ell}(X;R) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi\cup"] & \mathrm{Hom}_R(H_{\ell}(X;R), R) \arrow[d, "(\cap\varphi)^*"] \\ H^{k+\ell}(X;R) \arrow[r, "h"] & \mathrm{Hom}_R(H_{k+\ell}(X;R), R) \end{tikzcd}$$

Si les morphismes h sont des isomorphismes (par exemple, R est un corps ou $R=\mathbb{Z}$ et les groupes d'homologie de X sont libres), alors, on obtient que, au niveau des groupes d'homologie/cohomologie, les morphismes $\varphi\cup$ et $\cap\varphi$ sont duaux.

Soit R un anneau commutatif unitaire, et M une variété topologique compacte (sans bord) R-orientable et R-orientée de dimension n.

On a la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} H^k(M;R) \times H^{n-k}(M;R) &\longrightarrow R \\ (\varphi,\psi) &\longmapsto (\varphi\cup\psi)[M]. \end{aligned}$$

(Les R-modules qui apparaissent ici sont de type fini.)

Rappel Soient E et F deux R-modules libres. Une forme bilinéaire $b : E \times F \to R$ est dite non dégénérée si les morphismes associés

$$E \to \mathrm{Hom}_R(F, R) \quad \text{et} \quad F \to \mathrm{Hom}_R(E, R)$$

sont injectifs.

Si R est un corps et E, F sont des espaces vectoriels sur R de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

- b est non dégénérée,
- le premier morphisme associé est un isomorphisme,
- le deuxième morphisme associé est un isomorphisme.

Si E et F sont des R-modules libres, on dit que b est unimodulaire si les deux morphismes associés sont des isomorphismes.

Théorème (Dualité de Poincaré)

(1) Si R est un corps, la forme bilinéaire

$$H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) \to R$$

est non dégénérée pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

(2) Si $R = \mathbb{Z}$, la forme bilinéaire

$$H^k(M)/_{\mathrm{Tors}} \times H^{n-k}(M)/_{\mathrm{Tors}} \to \mathbb{Z}$$

est unimodulaire pour tout entier $0 \leq k \leq n$.

Démonstration Considérons l'application composée

$$H^{n-k}(M;R) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_R(H_{n-k}(M;R),R) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_R(H^k(M;R),R).$$

Ce morphisme composé envoie $\psi \in H^{n-k}(M;R)$ sur le morphisme $\varphi \mapsto \psi([M]\frown\varphi) = (\varphi\smile\psi)[M]$.

Si R est un corps (ou si $R=\mathbb{Z}$ et on passe au quotient par la torsion), le morphisme h est un isomorphisme. Donc, sous ces hypothèses, le morphisme composé est un isomorphisme. On montre que l'autre morphisme associé est un isomorphisme en utilisant la (anti)commutativité du cup produit. $\square$

Soit M une variété topologique compacte (sans bord) orientable (et orientée) de dimension $n=4k$. On obtient la forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\begin{aligned} H^{2k}(M;\mathbb{Q}) \times H^{2k}(M;\mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q}. \\ (\varphi,\psi) &\longmapsto (\varphi\smile\psi)[M] \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique associée (le nombre de carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs) s'appelle la <u>signature de M</u> (notation : $\sigma(M)$).