§3. Groupes d'homologie simpliciale

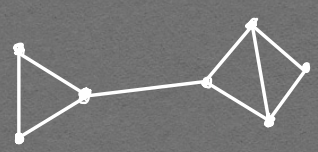
- **k-simplexe (affine) dans $\mathbb{R}^n$**

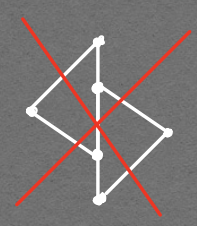
  Enveloppe convexe de $k+1$ points affinement indépendants.

- **complexe simplicial géométrique dans $\mathbb{R}^n$**

  C'est une collection K de simplexes dans $\mathbb{R}^n$ telle que
  - toute face d'un simplexe de K est dans K ;
  - l'intersection de deux simplexes quelconques de K est leur face commune ;
  - la collection K est localement finie.

Support $|K|$ de K.





Soit X un complexe simplicial (fini).
On numérote tous les sommets de X.
Pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout k-simplexe σ^k de X, on a l'homéomorphisme $T^k \to \sigma^k$ qui préserve l'ordre des sommets.
On obtient un CW-complexe (fini), dont les cellules sont orientées, et on peut considérer ses groupes d'homologie cellulaire.

<u>Proposition</u> Pour tout k-simplexe σ^k de X, on a

$$\partial \sigma^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, \Gamma_i(\sigma^k),$$

où $\Gamma_i(\sigma^k)$ est la i-ème face de codimension 1 de σ^k.

Complexe de chaînes classique de X
et groupes d'homologie simpliciale de X.

§4. Homologie avec des coefficients différents de $\mathbb{Z}$ et cohomologie

<u>Coefficients arbitraires</u> G un groupe abélien
X un espace topologique, $k \geq 0$ un entier.
Une k-chaîne singulière de X à coefficients dans G
est une combinaison formelle finie

$$\sum_i g_i \sigma_i,$$

où $g_i \in G$ et σ_i est un k-simplexe singulier de X.

Complexe $C(X;G)$ de chaînes singulières de X
à coefficients dans G.
Groupes d'homologie $H_k(X;G)$ à coefficients dans G.
Groupes d'homologie réduits.
Groupes d'homologie relatifs.

<u>Groupes de cohomologie</u> G un groupe abélien

X un espace topologique, $k \geqslant 0$ un entier.

Une k-cochaîne singulière de X à coefficients dans G est une fonction qui associe à tout k-simplexe singulier de X un élément de G.

$$C^k(X;G) = \mathrm{Hom}(C_k(X), G)$$

Complexe $C^\bullet(X;G)$ des k-cochaînes singulières de X à coefficients dans G :

$$\cdots \xleftarrow{\delta_3} C^2(X;G) \xleftarrow{\delta_2} C^1(X;G) \xleftarrow{\delta_1} C^0(X;G)$$

On pose $(\delta_k c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c\left(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_{k+1})}\right)$

pour toute k-cochaîne singulière c de X à coefficients dans G et pour tout $(k+1)$-simplexe singulier σ de X.

Si $a \in C_{k+1}(X)$, on a

$$\langle \delta_k c, a \rangle = \langle c, \partial_k a \rangle.$$

En particulier, $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Groupes de cohomologie $H^k(X;G)$ de X à coefficients dans G.

Cocycles et cobords.

Pour obtenir un complexe augmenté dans le cas de cochaînes, on considère le morphisme

$$\varepsilon' : C^0(X;G) \longleftarrow G$$

qui à tout élément $g \in G$ associe l'application constante g (sur les 0-simplexes singuliers de X).

Groupes de cohomologie relatifs $H^k(X,A;G)$

Suites exactes longues.

Formules des coefficents universels

Considérons un complexe de chaînes

$$\mathcal{C} : \quad \cdots \xrightarrow{\partial} C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0,$$

où C_i, $i \geq 0$, sont des groupes abéliens libres.

Application $h : H^n(\mathcal{C};G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C});G)$.

Si $\alpha \in H^n(\mathcal{C};G)$ est représenté par un morphisme $\varphi : C_n \to G$ tel que $\delta\varphi = 0$. On a $\varphi \circ \partial = 0$, donc φ s'annule sur $B_n \subset C_n$.

La restriction $\varphi_0 = \varphi|_{Z_n}$ induit un morphisme $\overline{\varphi}_0 : H_n(\mathcal{C}) = Z_n/B_n \longrightarrow G$ qui est un élément de $\mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C});G)$.

Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant φ:

si $\varphi \in \mathrm{Im}\,\delta$, on a $\varphi = \delta\psi = \psi \circ \partial$, donc φ est nul sur Z_n.

<u>Lemme</u> Le morphisme h est surjectif.

<u>Démonstration</u> La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \underset{\dashleftarrow}{\xrightarrow{\partial}} B_{n-1} \to 0$$

est scindée. Donc, il existe une projection $p : C_n \to Z_n$. Par conséquent, on peut étendre les morphismes définis sur Z_n à C_n.
Dans le cas d'un morphisme qui s'annule sur B_n, on obtient un élément de $\ker \delta$. Ceci donne

$$\mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C}); G) \longrightarrow \ker \delta \xrightarrow{pr} H^n(\mathcal{C}; G).$$

En composant ce morphisme avec h, on obtient l'identité.

$\square$

Suite exacte courte scindée :

$$0 \to \ker h \to H^n(\mathcal{C}; G) \underset{\dashleftarrow}{\xrightarrow{h}} \mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C}); G) \to 0$$

Diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & C_n \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les suites horisontales courtes sont scindées.

On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$\begin{tikzcd}
0 & Z_{n+1}^* \arrow[l] \arrow[d, "0"] & C_{n+1}^* \arrow[l] \arrow[d, "\delta"] & B_n^* \arrow[l] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l] \\
0 & Z_n^* \arrow[l] & C_n^* \arrow[l] & B_{n-1}^* \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(Ici, $A^* = \mathrm{Hom}(A, G)$.)

La suite exacte longue :

$$\cdots \leftarrow B_n^* \xleftarrow{i_n^*} Z_n^* \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow B_{n-1}^* \leftarrow Z_{n-1}^* \leftarrow \cdots$$

où $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$. On obtient

$$0 \leftarrow \ker i_n^* \leftarrow H^n(C;G) \leftarrow \mathrm{Coker}\, i_{n-1}^* \leftarrow 0$$

On a $\ker i_n^* \simeq \mathrm{Hom}(H_n(C), G)$, car $\ker i_n^*$ est formé des morphismes $Z_n \to G$ qui s'annulent sur B_n.

L'application $H^n(C;G) \to \ker i_n^*$ s'identifie avec h.

La suite exacte courte

$$0 \to B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \to H_{n-1}(C) \to 0$$

peut être vue comme résolution libre de $H_{n-1}(C)$.

En dualisant, on obtient

$$0 \leftarrow B_{n-1}^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}^* \leftarrow \mathrm{Hom}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \leftarrow 0$$

Donc, $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \simeq \mathrm{Coker}\, i_{n-1}^*$.

<u>Rappel</u> Si $\mathcal{F}$: $\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$ est une résolution libre de H, on a un complexe de chaînes

$$\cdots \leftarrow F_2 \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Les groupes d'homologie de ce complexe de chaînes ne dépendent pas du choix de résolution libre.

<u>Théorème (Formule des coefficients universels pour la cohomologie)</u>

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \to H^n(\mathcal{C}; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G) \to 0$$

<u>Exercice</u>

- $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \mathrm{Ext}(H, G) \oplus \mathrm{Ext}(H', G)$.
- $\mathrm{Ext}(H, G) = 0$ si H est libre.
- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$.

Corollaire Si les groupes $H_n(\mathcal{C})$ et $H_{n-1}(\mathcal{C})$ sont de type fini, alors

$$H^n(\mathcal{C};\mathbb{Z}) \simeq \left(H_n(\mathcal{C})/\mathrm{Tors}\, H_n(\mathcal{C})\right) \oplus \mathrm{Tors}\, H_{n-1}(\mathcal{C}),$$

où $\mathrm{Tors}\, H_n(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Tors}\, H_{n-1}(\mathcal{C})$ sont les sous-groupes de torsion de $H_n(\mathcal{C})$ et $H_{n-1}(\mathcal{C})$, respectivement.

Théorème (Formule des coefficients universels pour l'homologie)

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \to H_n(\mathcal{C}) \otimes G \to H_n(\mathcal{C};G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \to 0$$

Si $\mathcal{F}$: $\quad \cdots \to F_2 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$

est une résolution libre de H, on a un complexe de chaînes $\mathcal{F} \otimes G$:

$$\cdots \to F_2 \otimes G \longrightarrow \underline{\underline{F_1 \otimes G}} \longrightarrow F_0 \otimes G \longrightarrow H \otimes G \longrightarrow 0$$

On pose $\mathrm{Tor}(H,G) = H_1(\mathcal{F} \otimes G)$.

Exercice

- $\mathrm{Tor}(A,B) \simeq \mathrm{Tor}(B,A)$.
- $\mathrm{Tor}(A \oplus A', B) \simeq \mathrm{Tor}(A,B) \oplus \mathrm{Tor}(A',B)$.
- $\mathrm{Tor}(A,B) = 0$ si A (ou B) est libre.
- $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(\mathrm{Tors}\, A, B)$.
- $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \ker(A \xrightarrow{\times n} A)$.