## Démonstration

- Soit $U \subset M$ un ouvert euclidien.

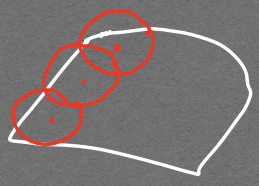
  Si $A \subset U$ est une réunion finie de sous-ensembles compacts convexes, alors $P_M(A)$ est vraie.

  On utilise l'égalité $B \cap (C_1 \cup \dots \cup C_K) = (B \cap C_1) \cup \dots \cup (B \cap C_K)$.

- Si $A \subset U$ est compact, alors $P_M(A)$ est vraie.

  $K_1 \supset K_1 \cap K_2 \supset K_1 \cap K_2 \cap K_3 \supset \dots$

  $K_i$ est une réunion finie de disques fermés de rayon $\frac{1}{i}$ centrés en points de $K$ tels que $K \subset K_i$.

  $K \subset U$

  L'intersection des compacts de cette suite décroissante coïncide avec $K$. De plus $P_M(K_1 \cap \dots \cap K_i)$ est vraie pour tout entier $i \geq 1$. Donc, $P_M(K)$ est vraie.

- Si $A \subset M$ est compact, alors $P_M(A)$ est vraie.

  On peut utiliser le fait que $M$ est métrisable (par exemple, c'est un corollaire du théorème de métrisation d'Urysohn) et procéder de façon similaire à l'étape précédente.

□

## Lemme (local-global pour les fermés)

Soit $P_M(A)$ une affirmation à propos de sous-ensembles fermés $A \subset M$ d'une variété topologique $M$ de dimension $n$. Supposons que

(i) si $A$ est compact et convexe dans un certain ouvert euclidien de $M$, alors $P_M(A)$ est vraie;

(ii) si $P_M(A)$, $P_M(B)$ et $P_M(A \cap B)$ sont vraies pour certains fermés $A$ et $B$ de $M$, alors $P_M(A \cup B)$ est aussi vraie;

(iii) si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ est une suite décroissante de compacts de $M$ tels que toutes les affirmations $P_M(A_i)$ soient vraies, alors $P_M(\bigcap_i A_i)$ est aussi vraie.

(iv) si $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une collection de compacts très disjoints (il existe des voisinages ouverts deux à deux disjoints $N_i \supset A_i$, $i \in \mathcal{I}$) de $M$ telle que $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ soit fermé, et si $P_M(A_i)$ est vraie pour tout $i \in \mathcal{I}$, alors $P_M(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i)$ est aussi vraie.

Alors, $P_M(A)$ est vraie pour tout fermé $A \subset M$.

**Démonstration** On sait que $P_M(A)$ est vraie pour tout compact $A \subset M$.

Considérons le compactifié d'Alexandrov $M^*$ de $M$ (si $M$ n'est pas compact). Remarquons que $M$ est localement compacte. On pose $M^* = M \cup \{\infty\}$ (on ajoute un point). La topologie de $M^*$ est formée des ouverts de $M$ et des ensembles de la forme $M^* \setminus K$, où $K \subset M$ est un compact.

L'espace topologique $M^*$ est compact et metrisable, et on peut choisir une metrique $d$ bornée par 1. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/d(x, \infty)$.

Si $A \subset M$ est un sous-ensemble fermé, on pose

$$B_i = f^{-1}\big([2i-2, 2i-1]\big) \cap A,$$
$$C_i = f^{-1}\big([2i-1, 2i]\big) \cap A, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On pose $B = \bigcup_i B_i$ et $C = \bigcup_i C_i$.

Ce sont des réunions très disjointes de compacts. De plus, $B$ et $C$ sont fermés. Donc, $P_M(B)$ et $P_M(C)$ sont vraies. De la même façon, $P_M(B \cap C)$ est vraie. Par conséquent, $P_M(A)$ est vraie. □

# Démonstration du théorème.

(1) Exercice.

(2) On vérifie les quatre propriétés du dernier lemme.

(i) Immédiat.

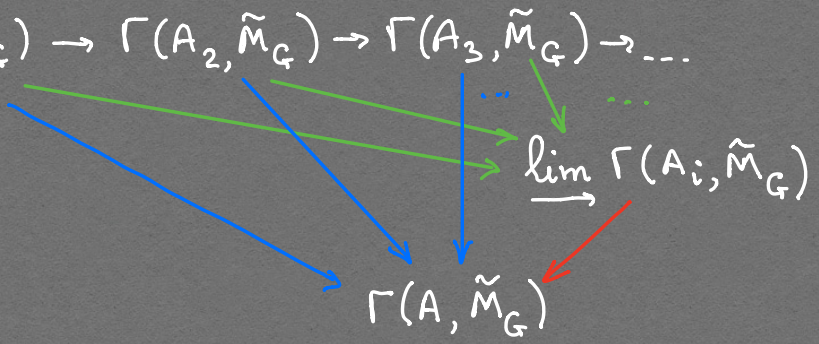
(ii) On a (on ne mentionne pas les coefficients)

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(M, M\setminus(A\cap B)) & \to & H_n(M, M\setminus(A\cup B)) & \to & H_n(M, M\setminus A)\oplus H_n(M, M\setminus B) & \to & H_n(M, M\setminus(A\cap B)) \\ \| & & \downarrow \jmath_{A\cup B} & & \downarrow \jmath_A \oplus \jmath_B & & \downarrow \jmath_{A\cap B} \\ 0 & \to & \Gamma_c(A\cup B, \tilde{M}_G) & \to & \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)\oplus \Gamma_c(B, \tilde{M}_G) & \to & \Gamma_c(A\cap B, \tilde{M}_G) \end{array}$$

On utilise le lemme des cinq.

(iii) On pose $A = \bigcap_i A_i$.

Les morphismes de restriction $\Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \to \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ induisent un isomorphisme $\varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(A, \tilde{M}_G)$.




Pour la démonstration, on utilise le fait suivant: si $W \supset A$ est un voisinage ouvert, il existe $A_i$ (parmi les compacts de la suite) tel que $A_i \subset W$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_n(M, M\setminus A_i) & \xrightarrow{\simeq} & H_n(M, M\setminus A) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \mathcal{Y}_A \\ \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(A, \tilde{M}_G) \end{array}$$

Pour montrer que le morphisme de la première ligne est un isomorphisme, on peut utiliser le fait que l'image de toute chaîne singulière est compacte.

(iv) On a

$$H_n(M, M\setminus \bigcup_i A_i) \simeq H_n(\bigcup_i N_i, (\bigcup_i N_i)\setminus(\bigcup_i A_i))$$

$$\simeq \bigoplus_i H_n(N_i, N_i\setminus A_i) \simeq \bigoplus_i H_n(M, M\setminus A_i).$$

Pour les groupes des sections à support compact, on a des isomorphismes similaires. □

**Corollaire** Soit $M$ une variété topologique connexe de dimension $n$, et soit $G$ un anneau commutatif unitaire. Supposons que $M$ est compacte.
Si $M$ est $G$-orientable, alors le morphisme

$$H_n(M;G) \longrightarrow H_n(M, M\setminus\{x\}; G)$$

est un isomorphisme pour tout $x \in M$.
En particulier, dans ce cas, on a

$$H_n(M;G) \simeq G.$$

**Exercice** Déterminer le groupe $H_n(M;G)$, où $M$ est une variété topologique connexe compacte non $G$-orientable de dimension $n$.

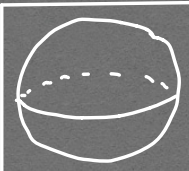
Un élément de $H_n(M;G)$ tel que son image dans $H_n(M, M\setminus\{x\};G)$ soit un générateur pour tout point $x \in M$ s'appelle une classe fondamentale de $M$ à coefficients dans $G$.
Une telle classe existe ssi $M$ est compacte et $G$-orientable.

# Variétés topologiques connexes compactes de dimension 1 ou 2

## dim 1

cercle $S^1$

## dim 2

| | | | |
|---|---|---|---|
|  $S^2$ | $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ | $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$ | ... $S_g = \#_g \mathbb{T}$ |
| | $\mathbb{RP}^2$ | $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ | ... $V_g = \#_g \mathbb{RP}^2$ |

On définit l'opération # de somme connexe pour les surfaces topologiques (connexes compactes sans bord). Considérons deux telles surfaces $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ et choisissons deux disques fermés $D_1 \subset \Sigma_1$ et $D_2 \subset \Sigma_2$. On choisit un homéomorphisme $\varphi$ entre les bords de ces disques. La surface $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ est obtenue de la réunion disjointe $(\Sigma_1 \setminus \mathring{D}_1) \amalg (\Sigma_2 \setminus \mathring{D}_2)$, où $\mathring{D}_1$ et $\mathring{D}_2$ sont les intérieurs de $D_1$ et $D_2$, respectivement, à l'aide de l'identification des bords de $D_1$ et $D_2$ par l'homéomorphisme $\varphi$. On peut vérifier que le type topologique du résultat ne dépend pas du choix de disques et d'homéomorphisme $\varphi$.