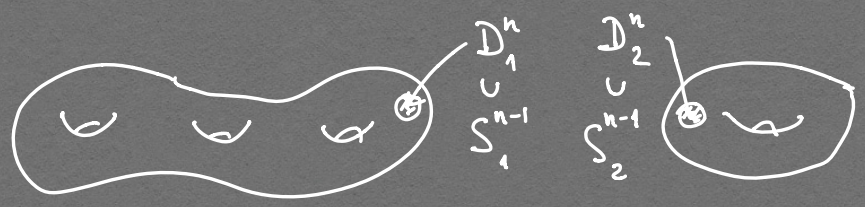
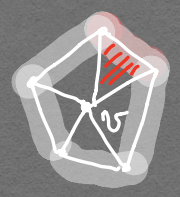



On généralise la définition ci-dessus aux dimensions supérieures. Le seul point délicat concerne le cas de deux variétés orientables (et orientées).
Dans ce cas, les sphères $S_1^{n-1}$ et $S_2^{n-1}$ sont orientées, et on suppose que $\varphi$ renverse l'orientation (dans le cas de surfaces topologiques orientables et orientées, le type topologique d'une somme connexe ne change pas si on remplace un homéomorphisme qui renverse l'orientation par un homéomorphisme qui préserve l'orientation, car toute surface topologique orientable possède un homéomorphisme qui renverse l'orientation).

On termine ce paragraphe par une autre définition importante.
<u>Déf.</u> Soit $M$ une variété topologique de dimension $n$, et soit $N \subset M$ une sous-variété topologique compacte orientable et orientée de dimension $k \leq n$.
On considère la classe fondamentale $[N] \in H_k(N)$.
La classe réalisée par $N$ dans $H_k(M)$ est $i_*[N]$, où $i_* : H_k(N) \longrightarrow H_k(M)$ est le morphisme induit par l'inclusion $i : N \hookrightarrow M$.

## §2. Dualité de Poincaré (première approche)

Soit $M$ une variété topologique connexe, compacte, orientable et orientée de dimension $n$.
Supposons qu'il existe une triangulation (finie) combinatoire $\tau$ de $M$
(le link de tout simplexe de $\tau$ est une PL-sphère).

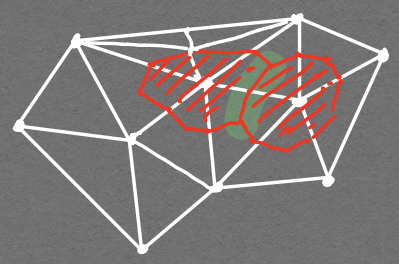



L'étoile d'un simplexe $\sigma$ d'une triangulation est la réunion de tous les simplexes contenant $\sigma$.
Le link de $\sigma$ est la réunion des simplexes $\sigma'$ de la triangulation tels que $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ et $\sigma, \sigma'$ sont des faces d'un simplexe.

Considerons la subdivision barycentrique $\tau_1$ de $\tau$.
Décomposition cellulaire duale de $\tau$. Cellules (fermées) :

sommet $v$ de $\tau$ $\rightsquigarrow$ $n$-cellule fermée $v^*$ (étoile de $v$ dans $\tau_1$)

$k$-simplexe $\sigma$ de $\tau$ $\rightsquigarrow$ $(n-k)$-cellule $\sigma^*$ (intersection des $n$-cellules fermées des sommets)



On considère chaque $(n-k)$-cellule comme une $(n-k)$-cochaîne.
Pour tout entier $0 \leq k \leq n$,
à toute $k$-chaîne simpliciale $c$ de $M$, on associe une $(n-k)$-cochaîne cellulaire $D(c)$, et on a $\delta D(c) = \pm D(\partial c)$. On obtient l'isomorphisme de Poincaré

$$H_k(M) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(M) \text{ pour tout entier } 0 \leq k \leq n.$$

Pour toute $k$-chaîne simpliciale $c_1 = \sum_i m_i \sigma_i$ de $M$ et toute $(n-k)$-chaîne cellulaire $c_2 = \sum_i \ell_i \sigma_i^*$, on peut considérer leur indice d'intersection

$$\xi(c_1, c_2) = \sum_{i,j} \delta_{ij} m_i \ell_j .$$

On a $\xi(\partial c, d) = \pm \xi(c, \partial d)$ pour toute $k$-chaîne simpliciale $c$ de $M$ et toute $(n-k+1)$-chaîne cellulaire $d$ de $M$ $(1 \leq k \leq n)$.
On obtient une forme bilinéaire entière

$$H_k(M)/_{\mathrm{Tors}} \times H_{n-k}(M)/_{\mathrm{Tors}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(ou $H_k(M; \mathbb{Z}/2) \times H_{n-k}(M; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$)
appelée forme d'intersection de $M$.

<u>Exemple</u> Pour $\mathbb{C}P^2$, on a $H_2(\mathbb{C}P^2) \simeq \mathbb{Z}$.
Un générateur est donné par la classe réalisée par une droite. Le carré de cette classe par rapport à la forme d'intersection

$$H_2(\mathbb{C}P^2) \times H_2(\mathbb{C}P^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est égal à $1$, autrement dit, cette forme bilinéaire est isomorphe à $\langle 1 \rangle$.

## §3. Variétés différentiables

Un atlas d'une variété topologique $M$ de dimension $n$ est une collection de cartes locales $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ telle que les ouverts $U_i$ forment un recouvrement de $M$.

Un tel atlas est dit de classe $C^k$ si, pour tous les $i$ et $j$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soit un difféomorphisme de classe $C^k$ (ici $k$ est un entier strictement positif ou $\infty$).

Atlas compatibles. Variété différentiable de classe $C^k$ (une classe d'équivalence d'atlas de classe $C^k$). Atlas maximal. Variétés lisses (variétés différentiables de classe $C^\infty$).

On dit qu'une variété lisse est orientable si elle admet un atlas orienté, c'est-à-dire, un atlas de classe $C^\infty$ dont toutes les applications de changement de cartes sont de Jacobiens strictement positifs.

Une orientation d'une variété lisse orientable