Théorème Soit M une variété lisse de dim. $n \geqslant 1$. Alors, M est orientable en tant qu'une variété topologique ssi elle est orientable en tant qu'une variété lisse.

Démonstration

($\Leftarrow$) Soit $x \in M$ un point, et soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ une carte locale telle que $x \in U$. On peut supposer que $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$.
On fixe un générateur $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
Alors, $\varphi_*^{-1}(\alpha) \in H_n(U, U \setminus \{x\})$ est un générateur.
Si $\varphi' : U' \to \mathbb{R}^n$ est une autre carte locale telle que $\varphi'(x) = 0$ (on peut supposer que $U' \subset U$), alors le difféomorphisme $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^n$ est de Jacobien strictement positif en tout point.
Un tel difféomorphisme est isotope à l'identité (exercice). On obtient que l'application $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, fournie par $\varphi' \circ \varphi^{-1}$, est homotope à l'identité.

La section $M \to \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ ainsi définie est continue (on utilise l'application $\varphi_*^{-1} : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n) \to H_n(U, U \setminus V)$, où $V = \varphi^{-1}(D^n)$).

$\Rightarrow$ Soit $s : M \to \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ une section dont toutes les images sont des générateurs. Pour chaque carte locale $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, on peut comparer le générateur $s(x)$ (ici $x \in U$) et le générateur fixé de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Modification appropriée de cartes (on compose, si nécessaire, des cartes avec une réflexion) donne un atlas orienté. $\square$

§4. Cohomologie de de Rham

On note $A^p(V)$ l'espace des p-formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel (réel) V.
On note $\omega \wedge \eta$ le produit extérieur de $\omega \in A^p(V)$ et $\eta \in A^q(V)$:

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma}{}' \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_p})\, \eta(x_{\sigma_{p+1}}, \dots, x_{\sigma_{p+q}}).$$

$$(\sigma_1 < \dots < \sigma_p \text{ et } \sigma_{p+1} < \dots < \sigma_{p+q})$$

Si $\dim V = n$, on a $\dim A^p(V) = \binom{n}{p}$:
si $a_1, \dots, a_n$ est une base de V^*, alors
$\{a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$ est une base de $A^p(V)$.

Soit M une variété lisse de dimension n.
On note $T_x(M)$ l'espace tangent de M en $x \in M$.
Rappel Si $\gamma : \mathcal{V}_0 \to M$ est une courbe lisse (définie sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}$ de $0 \in \mathbb{R}$) t.q. $\gamma(0) = x$, alors, pour toute fonction lisse $f : U \to \mathbb{R}$ (où $U \ni x$ est un voisinage ouvert), on considère la dérivée directionnelle $D_\gamma(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$ de f.
Relation d'équivalence.
Vecteurs tangents.

Une p-forme différentielle sur M est une application différentiable (de classe C^∞) qui associe à tout point $x \in M$ une forme $\omega_x \in A^p(T_x(M))$ (une section C^∞ du fibré vectoriel $\Lambda^p T^*(M)$).

En coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ au voisinage de x, l'espace cotangent $T_x^*(M)$ a une base $dx_1, \dots, dx_n$, où $dx_i(\partial/\partial x_j) = \delta_{ij}$.

Ici, $\partial/\partial x_j \big|_x$ est donné par D_{v_i} où $v_i(t) = (0, \dots, 0, \underset{i}{t}, 0, \dots, 0)$.

Pour toute p-forme différentielle ω sur M, au voisinage de x, on a

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p}{}' f_{i_1, \dots, i_p} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$ où $f_{i_1, \dots, i_p}$ est lisse.

On note $\Omega^p(M)$ l'espace vectoriel des p-formes différentielles sur M. On pose $\Omega(M) = \bigoplus_p \Omega^p(M)$.

Produit extérieur (point par point).

<u>Dérivée extérieure</u> $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$.

Si $f \in \Omega^0(M)$, la 1-forme différentielle df est la différentielle de f : $df(X) = X(f)$ pour tout champ de vecteurs X de M. On a

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{(au voisinage de } x\text{)}.$$

Si $\omega \in \Omega^p(M)$ et

$$\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad \text{(au voisinage de } x\text{)},$$

alors

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Par linéarité, on obtient la dérivée extérieure

$$d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M).$$

On a $\quad d \circ d = 0.$

Formes fermées. Formes exactes.

Groupes $H^p_\Omega(M)$ de cohomologie de de Rham de M.

Si $\omega \in \Omega^p(M)$ et $\eta \in \Omega^q(M)$, on a

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Ceci fournit une application bilinéaire

$$H^p_\Omega(M) \times H^q_\Omega(M) \longrightarrow H^{p+q}_\Omega(M)$$

donnée par $([\omega], [\eta]) \longmapsto [\omega \wedge \eta]$.

On obtient une algèbre graduée (associative et anti-commutative) $H^\bullet_\Omega(M)$.

Si M et N deux variétés lisses et $\Theta : M \to N$ est une application lisse, pour tout entier $p \geq 0$, on a l'application

$$\Theta^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

définie par

$$\Theta^*(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(\Theta_*(X_1), \dots, \Theta_*(X_p)),$$

où $X_1, \dots, X_p$ sont des vecteurs tangents à M en $x \in M$ (si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a $\Theta^*(f) = f \circ \Theta$).

Ici, $\Theta_*(X)(f) = X(f \circ \Theta)$ pour tout vecteur tangent X à M en x.

On a $\Theta^*(f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = (f \circ \Theta)\, d(x_1 \circ \Theta) \wedge \dots \wedge d(x_p \circ \Theta)$.

L'application Θ^* induit un morphisme

$$H^\bullet_\Omega(N) \longrightarrow H^\bullet_\Omega(M) \text{ d'algèbres graduées.}$$

Intégration de formes différentielles

Le support d'une forme $\omega \in \Omega^p(M)$ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$.

Si ω est une n-forme différentielle sur un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ à support compact, on peut étendre ω à $\mathbb{R}^n$ (par 0) avec le support dans un cube.

Si $\omega = f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (où f est à support compact), on pose

$$\int_W \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\dots} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Si $W' \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et
$\theta : W' \to W$ est un difféomorphisme,
alors

$$\theta^*(\omega) = (f \circ \theta)\, d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \theta)$$

et

$$\int_{W'} \theta^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^*(\omega) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

(formule de changement de variables).

Si M est orientée et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$
est une carte locale d'un atlas orienté,
considérons une n-forme $\omega \in \Omega^n(M)$ dont
le support est contenu dans U. On pose

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega .$$

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix
d'une carte locale (de l'atlas orienté).

Pour une forme arbitraire $\omega \in \Omega^n(M)$, on procède
par une partition de l'unité:

- $f_i \geq 0$ des fonctions lisses;
- le support de f_i est contenu dans le domaine de définition U_i d'une carte locale, et $\{U_i\}_i$ forment un recouvrement localement fini de M;
- $\sum_i f_i = 1$.

Tout compact $K \subset M$ touche un nombre fini d'ouverts U_i. On pose

$$\int \omega = \sum_i \int f_i \omega .$$

Si $\{g_j\}$ est une autre partition de l'unité, on a

$$\sum_{i,j} f_i g_j = 1 .$$

Donc,

$$\sum_i \int f_i \omega = \sum_i \sum_j \int f_i g_j \omega = \sum_j \int g_j \omega .$$

Si $\theta : M \to N$ est un difféomorphisme de variétés orientées qui préserve l'orientation, on a

$$\int_N \omega = \int_M \theta^* \omega$$

pour toute n-forme $\omega \in \Omega^n(N)$ à support compact.

Relations avec la cohomologie singulière

Introduisons d'abord la notion d'une variété topologique à bord.

<u>Déf.</u> Une variété topologique de dimension n à bord (où $n \geq 1$ est un entier) est un espace topologique M t.q.

- tout point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$;
- M est séparé;
- M possède une base dénombrable.

L'ensemble ∂M des points de M qui possède un voisinage ouvert homéomorphe à

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$$

et qui correspondent sous cette identification à un point de l'hyperplan $x_1 = 0$ s'appelle le bord de M.

<u>Remarques</u> (1) Si $x \in \partial M$, alors x ne possède pas de voisinage (dans M) homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. En effet, si $U \ni x$ est un voisinage de x dans M, on a $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\})$, d'après le théorème d'excision.

(2) L'espace topologique ∂M est une variété topologique de dimension $n-1$ (sans bord).